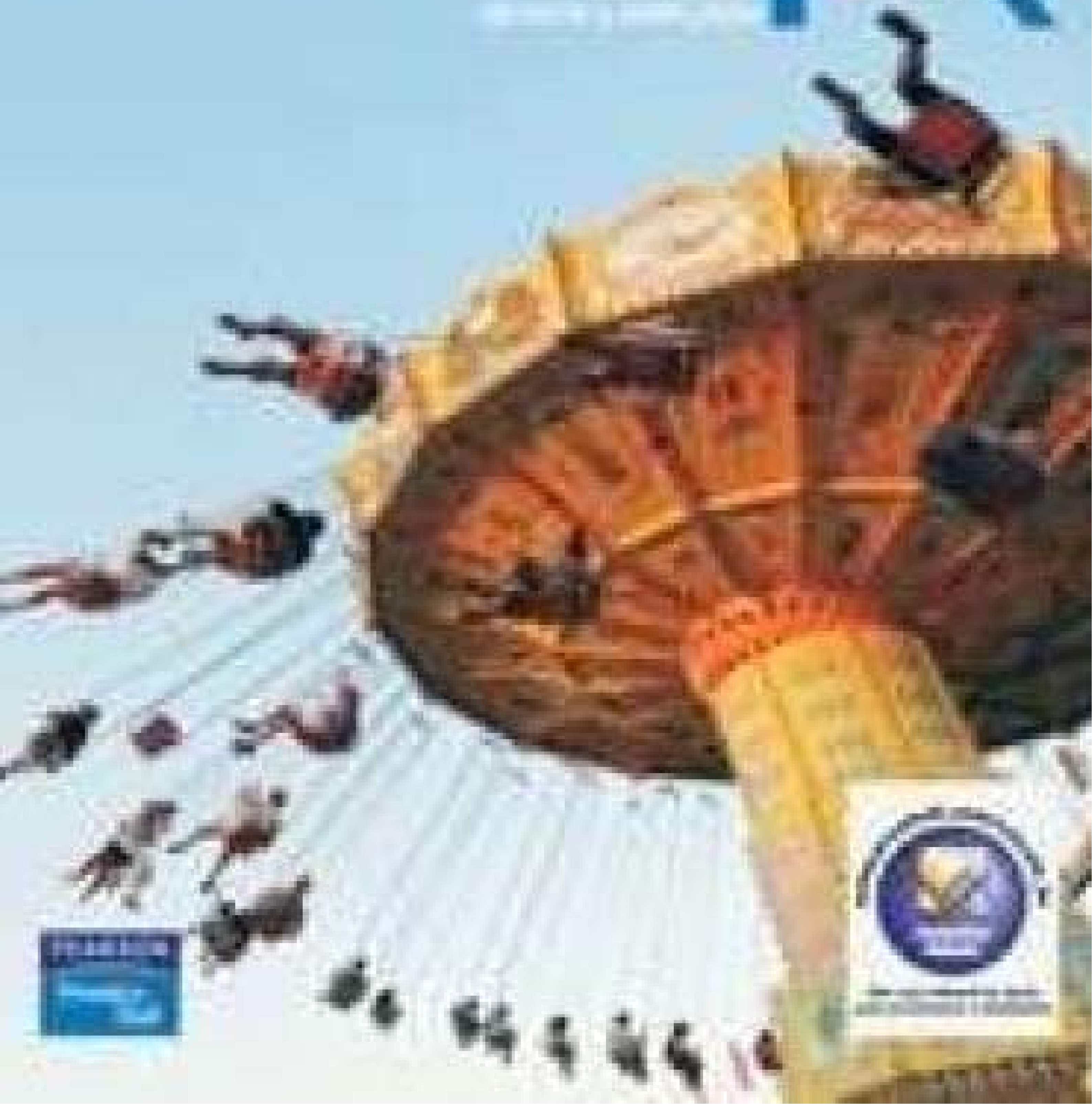
Diva Marília Flemming   Mirian Buss Gonçalves

Cálculo A

Funções, limite, derivação e integração



MAKRON
Books

CAPÍTULO 1

EDITORA DA UFSC

NÚMEROS REAIS

Tudo o que vamos estudar no curso de Cálculo se referirá a conjuntos de números reais. Estudaremos funções que são definidas e assumem valores nesses conjuntos. Assim, ao estudarmos limite, continuidade, derivadas e integrais dessas funções, usaremos os fatos elementares a respeito dos números reais.

Neste 1º capítulo, vamos analisar o *conjunto dos números reais*. Enunciaremos os axiomas básicos, deduziremos propriedades, e apresentaremos exemplos envolvendo estas propriedades.

1.1 CONJUNTOS NUMÉRICOS

Os primeiros números conhecidos pela humanidade são os chamados *inteiros positivos* ou *naturais*. Temos então o conjunto

$$N = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Os números $-1, -2, -3, \ldots$ são chamados *inteiros negativos*. A união do conjunto dos números naturais com os inteiros negativos e o zero (0) define o conjunto dos números inteiros que denotamos por

$$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}.$$

Os números da forma m/n, $n \neq 0$, m, $n \in Z$, são chamados de frações e formam o conjunto dos *números racionais*. Denotamos:

$$Q = \{x \mid x = m/n\ , m, n \in Z, n \neq 0\}.$$

Finalmente encontramos números que não podem ser representados na forma m/n, $n \neq 0$, m, $n \in Z$, tais como $\sqrt{2} = 1{,}414\ ...$, $\pi = 3{,}14159\ ...$, $e = 2{,}71\ ...$. Estes números formam o conjunto dos *números irracionais* que denotaremos por Q'.

Da união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais resulta o *conjunto dos números reais,* que denotamos por

$$\mathbb{R} = Q \cup Q'.$$

A seguir apresentaremos os axiomas, definições e propriedades referentes ao conjunto dos números reais.

No conjunto dos números reais introduzimos duas operações, chamadas *adição* e *multiplicação* que satisfazem os axiomas abaixo:

1.1.1 Fechamento. Se a e $b \in \mathbb{R}$, existe um e somente um número real denotado por $a + b$, chamado soma e existe um e somente um número real, denotado por ab (ou $a \times b$, ou $a \cdot b$) chamado produto.

1.1.2 Comutatividade. Se $a, b \in \mathbb{R}$ então $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$.

1.1.3 Associatividade. Se a, b e $c \in \mathbb{R}$ então

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{e} \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

1.1.4 Distributividade. Se $a, b, c \in \mathbb{R}$ então

$$a \cdot (b + c) = ab + ac.$$

1.1.5 Existência de Elementos Neutros. Existem 0 e $1 \in \mathbb{R}$ tais que $a + 0 = a$ e $a \cdot 1 = a$, para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

1.1.6 Existência de Simétricos. Todo $a \in \mathbb{R}$ tem um simétrico, denotado por $-a$, tal que $a + (-a) = 0$.

1.1.7 Existência de Inversos. Todo $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ tem um inverso, denotado por $1/a$, tal que $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

Usando 1.1.6 e 1.1.7 podemos definir a subtração e a divisão de números reais.

1.1.8 Subtração. Se $a, b \in \mathbb{R}$, a diferença entre a e b, denotada por $a - b$, é definida por $a - b = a + (-b)$.

1.1.9 Divisão. Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, o quociente de a e b é definido por $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$.

1.2 DESIGUALDADES

Para podermos dizer que um número real é maior ou menor que outro, devemos introduzir o conceito de número real positivo e uma relação de ordem.

1.2.1 Axioma de Ordem. No conjunto dos números reais existe um subconjunto denominado de números positivos, tal que:

(*i*) se $a \in \mathbb{R}$, exatamente uma das três afirmações ocorre: $a = 0$; a é positivo; $-a$ é positivo;

(*ii*) a soma de dois números positivos é positiva;

(*iii*) o produto de dois números positivos é positivo.

1.2.2 Definição. O número real a é negativo se e somente se $-a$ é positivo.

1.2.3 Os símbolos < (menor que) e > (maior que) são definidos:

(*i*) $a < b \Leftrightarrow b - a$ é positivo;

(*ii*) $a > b \Leftrightarrow a - b$ é positivo.

1.2.4 Os símbolos $\leq$ (menor ou igual que) e $\geq$ (maior ou igual que) são definidos:

(*i*) $a \leq b \Leftrightarrow a < b$ ou $a = b$;

(*ii*) $a \geq b \Leftrightarrow a > b$ ou $a = b$.

Expressões envolvendo os símbolos definidos acima são chamadas de DESIGUALDADES. $a < b$ e $a > b$ são desigualdades estritas enquanto $a \leq b$ e $a \geq b$ são desigualdades não estritas.

1.2.5 Propriedades. Sejam $a, b, c, d \in I\!R$.

(*i*) Se $a > b$ e $b > c$, então $a > c$.

(*ii*) Se $a > b$ e $c > 0$, então $ac > bc$.

(*iii*) Se $a > b$ e $c < 0$, então $ac < bc$.

(*iv*) Se $a > b$, então $a + c > b + c$ para todo real c.

(*v*) Se $a > b$ e $c > d$, então $a + c > b + d$.

(*vi*) Se $a > b > 0$ e $c > d > 0$, então $ac > bd$.

As propriedades enunciadas podem ser facilmente provadas usando-se as definições anteriores. Por exemplo:

Prova da Propriedade *i*). (Se $a > b$ e $b > c$, então $a > c$).

Se $a > b \overset{(def.)}{\Longrightarrow} (a - b) > 0$.

Se $b > c \overset{(def.)}{\Longrightarrow} (b - c) > 0$.

Usando 1.2.1 (*ii*), temos $(a - b) + (b - c) > 0$

ou $a - c > 0 \overset{(def.)}{\Longrightarrow} a > c$.

Prova da Propriedade *ii*). (Se $a > b$ e $c > 0$, então $ac > bc$).

$$\text{Se } a > b \overset{\text{(def.)}}{\Longrightarrow} (a - b) > 0.$$

Usando 1.2.1 (iii) temos $(a - b) \cdot c > 0$ ou $(ac - bc) > 0$ e finalmente, pela definição, $ac > bc$.

1.3 VALOR ABSOLUTO

1.3.1 Definição. O valor absoluto de a, denotado por $|a|$, é definido como

$|a| = a$, se $a \geq 0$

$|a| = -a$, se $a < 0$.

1.3.2 Interpretação Geométrica. Geometricamente o valor absoluto de a, também chamado módulo de a, representa a distância entre a e 0. Escreve-se então $|a| = \sqrt{a^2}$.

1.3.3 Propriedades.

(*i*) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$, onde $a > 0$.

(*ii*) $|x| > a \Leftrightarrow x > a$ ou $x < -a$, onde $a > 0$.

(*iii*) Se $a, b \in \mathbb{R}$, então $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

(*iv*) Se $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $b \neq 0$, então $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

(*v*) (Desigualdade triangular)

Se $a, b \in \mathbb{R}$, então $|a + b| \leq |a| + |b|$.

(*vi*) Se $a, b \in \mathbb{R}$, então $|a - b| \leq |a| + |b|$.

(*vii*) Se $a, b \in \mathbb{R}$, então $|a| - |b| \leq |a - b|$.

Vamos provar algumas das propriedades citadas.

Prova da Propriedade *i*). ($|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$, onde $a > 0$).

Provaremos por partes:

Parte 1: $-a < x < a$, com $a > 0 \Rightarrow |x| < a$.

Se $x \geq 0$, $|x| = x$. Como, por hipótese, $x < a$, vem que $|x| < a$.

Se $x < 0$, $|x| = -x$. Como $-a < x$, aplicando a propriedade 1.2.5 iii) concluímos que $-x < a$.

Assim, $|x| = -x < a$ ou seja $|x| < a$.

Parte 2: $|x| < a$ onde $a > 0 \Rightarrow -a < x < a$.

Se $x \geq 0$, então $|x| = x$. Como $|x| < a$, concluímos que $x < a$. Como $a > 0$, segue que $-a < 0$ e então $-a < 0 \leq x < a$ ou seja $-a < x < a$.

Se $x < 0$, $|x| = -x$. Como por hipótese $|x| < a$, temos que $-x < a$. Como $x < 0$, segue que $-x > 0$. Portanto, $-a < 0 < -x < a$ ou de forma equivalente $-a < x < a$.

Prova da Propriedade *iii*). (Se $a, b \in \mathbb{R}$ então $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$).

Usando 1.3.2, vem

$$|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2 \cdot b^2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} = |a| \cdot |b|.$$

Prova da Propriedade *iv*). (Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$ então $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$).

Usando 1.3.2, vem

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0.$$

Prova da Propriedade *v*). (Se $a, b \in \mathbb{R}$, então $|a + b| \leq |a| + |b|$).

Como $a, b \in \mathbb{R}$, de 1.2.1(i) vem que ab é positivo, negativo ou zero. Em qualquer caso vale,

$$ab \leq |ab| = |a|\,|b|. \tag{1}$$

Multiplicando (1) por 2, temos

$$2ab \leq 2\,|a|\,|b|. \tag{2}$$

Da igualdade $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ e de (2)

vem que $(a + b)^2 \leq a^2 + 2\,|a|\,|b| + b^2$

$$(a + b)^2 \leq |a|^2 + 2\,|a|\,|b| + |b|^2$$

$$(a + b)^2 \leq (|a| + |b|)^2. \tag{3}$$

Tomamos a raiz quadrada de (3) e obtemos

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Prova da Propriedade *vi*). (Se $a, b \in \mathbb{R}$, então $|a - b| \leq |a| + |b|$).

Basta escrever $a - b = a + (-b)$ e aplicar a propriedade *v*).

$$|a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + |-b|$$

$$= |a| + |b|.$$

Prova da Propriedade *vii*). (Se $a, b \in \mathbb{R}$, então $|a| - |b| \leq |a - b|$).

Vamos fazer $a - b = c$. Aplicando a propriedade *v*, vem

$$|a| = |c + b| \leq |c| + |b|$$

$$|a| - |b| \leq |c|$$

$$|a| - |b| \leq |a - b|.$$

1.4 INTERVALOS

Intervalos são conjuntos infinitos de números reais como segue:

1.4.1 Intervalo Aberto. $\{x|\ a < x < b\}$ denota-se (a, b) ou $]a, b[$.

1.4.2 Intervalo Fechado. $\{x|\ a \leq x \leq b)$ denota-se $[a, b]$.

1.4.3 Intervalo Fechado à Direita e Aberto à Esquerda. $\{x|\ a < x \leq b\}$ denota-se $(a, b]$ ou $]a, b]$.

1.4.4 Intervalo Aberto à Direita e Fechado à Esquerda. $\{x|\ a \leq x < b\}$ denota-se [a, b) ou $[a, b[$.

1.4.5 Intervalos Infinitos.

(*i*) $\{x \mid x > a\}$ denota-se $(a, +\infty)$ ou $]\ a, +\infty[$;

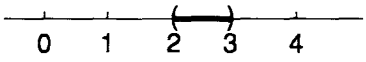
(*ii*) $\{x \mid x \geq a\}$ denota-se $[a, +\infty)$ ou $[a, +\infty\ [$;

(*iii*) $\{x \mid x < b\}$ denota-se $(-\infty, b)$ ou $]-\infty, b[$;

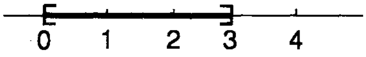
(*iv*) $\{x \mid x \leq b\}$ denota-se $(-\infty, b]$ ou $]-\infty, b]$.

Podemos fazer uma representação gráfica dos intervalos como nos exemplos que seguem:

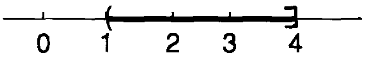
ex. 1.4.1 – (2, 3)



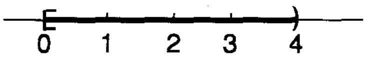
ex. 1.4.2 – [0, 3]



ex. 1.4.3 – (1, 4]

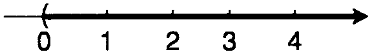


ex. 1.4.4 – [0, 4)

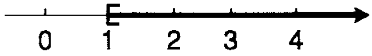


ex. 1.4.5 –

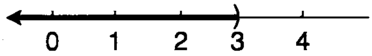
(i) $(0, +\infty)$



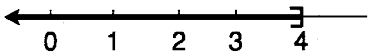
(ii) $[1, +\infty)$



(iii) $(-\infty, 3)$



(iv) $(-\infty, 4]$



1.5 EXEMPLOS

1. Determinar todos os intervalos de números que satisfazem as desigualdades abaixo. Fazer a representação gráfica.

(i)

$$3 + 7x < 8x + 9$$

$$3 + 7x - 3 < 8x + 9 - 3 \qquad \text{(propriedade 1.2.5 } iv\text{)}$$

$$7x < 8x + 6$$

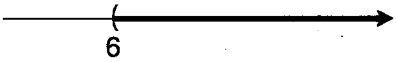
$$7x - 8x < 8x + 6 - 8x \qquad \text{(propriedade 1.2.5 } iv\text{)}$$

$$-x < 6$$

$$x > -6 \qquad \text{(propriedade 1.2.5 } iii\text{)}$$

Portanto, $\{x \mid x > -6\} = (-6, +\infty)$ é a solução,

e graficamente



(*ii*)

$$\begin{aligned}
7 &< 5x + 3 \leq 9 \\
7 - 3 &< 5x + 3 - 3 \leq 9 - 3 && \text{(propriedade 1.2.5 } iv\text{)} \\
4 &< 5x \leq 6 \\
\frac{4}{5} &< x \leq \frac{6}{5} && \text{(propriedade 1.2.5 } ii\text{)}
\end{aligned}$$

Portanto, $\{x \mid 4/5 < x \leq 6/5\} = (4/5, 6/5]$ é a solução,

e graficamente

(*iii*) $\dfrac{x}{x + 7} < 5, \quad x \neq -7.$

Vamos multiplicar ambos os membros da desigualdade por $x + 7$. Devemos. então, considerar dois casos:

Caso 1. $x + 7 > 0$ ou $x > -7$ (propriedade 1.2.5 *iv*)

Então,

$$\begin{aligned}
x &< 5(x + 7) && \text{(propriedade 1.2.5 } ii\text{)} \\
x &< 5x + 35 \\
x - 5x &< 5x + 35 - 5x && \text{(propriedade 1.2.5 } iv\text{)} \\
-4x &< 35 \\
x &> -35/4 && \text{(propriedade 1.2.5 } iii\text{)}
\end{aligned}$$

Portanto, $\{x \mid x > -7\} \cap \{x \mid x > -35/4\} = (-7, +\infty)$ é a solução do caso 1.

Caso 2. $x + 7 < 0$ ou $x < -7$.

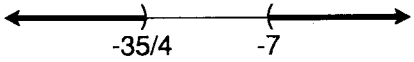
Então,

$$\begin{aligned}
x &> 5(x + 7) \\
x &> 5x + 35 \\
x &< -35/4
\end{aligned}$$

Portanto, $\{x \mid x < -7\} \cap \{x \mid x < -35/4\} = (-\infty, -35/4)$ é a solução do caso 2.

A solução final é a união de $(-7, +\infty)$ e $(-\infty, -35/4)$ ou seja $(-\infty, -35/4) \cup (-7, +\infty)$ ou ainda $x \notin [-35/4, -7]$.

Graficamente,



(*iv*) $(x+5)(x-3) > 0$.

A desigualdade será satisfeita quando ambos os fatores tiverem o mesmo sinal:

Caso 1.

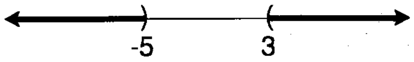
$$\begin{aligned} (x+5) &> 0 \text{ e } (x-3) > 0 \text{ ou} \\ x &> -5 \quad \text{e} \quad x > 3 \\ &\text{ou} \\ x &> 3. \end{aligned}$$

Caso 2.

$$\begin{aligned} x+5 &< 0 \text{ e } x - 3 < 0 \\ &\text{ou} \\ x &< -5 \text{ e } x < 3 \\ &\text{ou} \\ x &< -5. \end{aligned}$$

A solução final será a união entre $(3, +\infty)$ e $(-\infty, -5)$ ou seja todos os $x \notin [-5, 3]$.

Geometricamente,



2. Resolva as equações:

(*i*) $|5x - 3| = 7$.

Esta equação é verdadeira quando $5x - 3 = 7$ ou $5x - 3 = -7$, ou seja, $x = 2$ ou $x = -4/5$.

Portanto, as duas soluções da equação dada são:

$x = 2$ e $x = -4/5$.

(*ii*) $|7x - 1| = |2x + 5|$.

Esta equação será satisfeita se:

Caso 1.

$$\begin{aligned} 7x - 1 &= 2x + 5 \\ 7x - 2x &= 5 + 1 \\ 5x &= 6 \\ x &= 6/5. \end{aligned}$$

Caso 2.

$$\begin{aligned} 7x - 1 &= -(2x + 5) \\ 7x - 1 &= -2x - 5 \\ 7x + 2x &= -5 + 1 \\ 9x &= -4 \\ x &= -4/9. \end{aligned}$$

Portanto, a solução final é $x = 6/5$ e $x = -4/9$.

(*iii*) $|9x + 7| = -7$.

Esta equação não tem solução pois o valor absoluto de um número nunca pode ser negativo.

3. Encontre os números reais que satisfaçam as seguintes desigualdades:

(*i*) $|7x - 2| < 4$.

Aplicando a propriedade 1.3.3 (*i*),

$$\begin{aligned} -4 &< 7x - 2 < 4 \\ -4 + 2 &< 7x - 2 + 2 < 4 + 2 \end{aligned}$$

$$-2 < 7x < 6$$

$$-\frac{2}{7} < x < \frac{6}{7}.$$

Portanto, $x \in (-2/7, 6/7)$.

(*ii*) $\left|\dfrac{7-2x}{4+x}\right| \leq 2,\ x \neq -4.$

Aplicando a propriedade 1.3.3 (*iv*),

$$\frac{|7-2x|}{|4+x|} \leq 2.$$

$$|7-2x| \leq 2\,|4+x|.$$

Elevando ambos os lados da desigualdade ao quadrado, vem

$$49 - 28x + 4x^2 \leq 4\,(16 + 8x + x^2)$$

$$49 - 28x + 4x^2 \leq 64 + 32x + 4x^2$$

$$49 - 28x + 4x^2 - 64 - 32x - 4x^2 \leq 0$$

$$-60x - 15 \leq 0$$

$$-60x \leq 15$$

$$60x \geq -15$$

$$x \geq -15/60$$

$$x \geq -1/4 \text{ ou } x \in [-1/4, +\infty).$$

(*iii*) $\left|\dfrac{3-2x}{2+x}\right| \leq 4,\ x \neq -2.$

$$|3-2x| \leq 4\,|2+x|$$

$$9 - 12x + 4x^2 \leq 16\,(4 + 4x + x^2)$$

$$9 - 12x + 4x^2 \leq 64 + 64x + 16x^2$$

$$-12x^2 - 76x - 55 \leq 0$$

$$12x^2 + 76x + 55 \geq 0$$
$$12(x + 5/6)(x + 11/2) \geq 0$$
$$(x + 5/6)(x + 11/2) \geq 0.$$

Procedendo como no exemplo 1 (iv) concluímos que a solução final será a união de $(-\infty, -11/2]$ e $[-5/6, +\infty)$, ou seja, $x \notin (-11/2, -5/6)$.

4. Mostre que, se $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, então

(i) $(x - a)(x - b) > 0 \Rightarrow x \notin [a, b]$.

(ii) $(x - a)(x - b) \geq 0 \Rightarrow x \notin (a, b)$.

(iii) $(x - a)(x - b) < 0 \Rightarrow x \in (a, b)$.

(iv) $(x - a)(x - b) \leq 0 \Rightarrow x \in [a, b]$.

Prova de (i). $((x - a)(x - b) > 0 \Rightarrow x \notin [a, b])$.

Os dois fatores $(x - a)$ e $(x - b)$ devem ter o mesmo sinal. Temos dois casos:

Caso 1. $x - a > 0$ e $x - b > 0$

ou

$x > a$ e $x > b$.

A solução deste caso será $x > b$ ou $(b, +\infty)$.

Caso 2. $x - a < 0$ e $x - b < 0$

ou

$x < a$ e $x < b$.

A solução deste caso será $x < a$ ou $(-\infty, a)$.

Portanto, a solução final é a união entre $(-\infty, a)$ e $(b, +\infty)$ ou seja $x \notin [a. b]$.

De maneira análoga pode-se provar as demais relações.

1.6 EXERCÍCIOS

1. Determinar todos os intervalos de números que satisfaçam as desigualdades abaixo. Fazer a representação gráfica.

a) $3 - x < 5 + 3x$

b) $2x - 5 < \frac{1}{3} + \frac{3x}{4} + \frac{1 - x}{3}$

c) $2 > -3 - 3x \geq -7$

d) $\frac{5}{x} < \frac{3}{4}$

e) $x^2 \leq 9$

f) $x^2 - 3x + 2 > 0$

g) $1 - x - 2x^2 \geq 0$

h) $\frac{x + 1}{2 - x} < \frac{x}{3 + x}$

i) $x^3 + 1 > x^2 + x$

j) $(x^2 - 1)(x + 4) \leq 0$

k) $\frac{2}{x - 2} \leq \frac{x + 2}{x - 2} \leq 1$

l) $x^4 \geq x^2$

m) $\frac{x}{x - 3} < 4$

n) $\frac{1/2\ x - 3}{4 + x} > 1$

o) $\frac{3}{x - 5} \leq 2$

p) $x^3 - x^2 - x - 2 > 0$

q) $x^3 - 3x + 2 \leq 0$

r) $\frac{1}{x + 1} \geq \frac{3}{x - 2}$

s) $8x^3 - 4x^2 - 2x + 1 < 0$

t) $12x^3 - 20x^2 \geq -11x + 2.$

2. Resolver as equações em $\mathbb{R}$.

a) $|5x - 3| = 12$

b) $|-4 + 12x| = 7$

c) $|2x - 3| = |7x - 5|$

d) $\left|\frac{x + 2}{x - 2}\right| = 5$

e) $\left|\dfrac{3x+8}{2x-3}\right| = 4$

f) $|3x+2| = 5-x$

g) $|9x| - 11 = x$

h) $2x - 7 = |x| + 1.$

3. Resolver as inequações em $\boldsymbol{R}$.

a) $|x+12| < 7$

b) $|3x-4| \leq 2$

c) $|5-6x| \geq 9$

d) $|2x-5| > 3$

e) $|6+2x| < |4-x|$

f) $|x+4| \leq |2x-6|$

g) $|3x| > |5-2x|$

h) $\left|\dfrac{7-2x}{5+3x}\right| \leq \dfrac{1}{2}$

i) $|x-1| + |x+2| \geq 4$

j) $1 < |x+2| < 4$

k) $\left|\dfrac{2+x}{3-x}\right| > 4$

l) $\left|\dfrac{5}{2x-1}\right| \geq \left|\dfrac{1}{x-2}\right|$

m) $|x| + 1 < x$

n) $3|x-1| + |x| < 1$

o) $|2x^2 + 3x + 3| \leq 3$

p) $|x-1| + |x-3| < |4x|$

q) $\dfrac{1}{|x+1|\,|x-3|} \geq \dfrac{1}{5}$

r) $\left|\dfrac{x-1/2}{x+1/2}\right| < 1$

s) $\left|\dfrac{3-2x}{1+x}\right| \leq 4$

4. Demonstrar:

a) Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$, então $a^2 = b^2$ se e somente se $a = b$.

b) Se $x < y$, então $x < \frac{1}{2}(x + y) < y$.

c) $|x| > a$ se e somente se $x > a$ ou $x < -a$, onde $a > 0$.

d) Se $0 < a < b$, então $\sqrt{ab} < \frac{a + b}{2}$.

MAKRON
Books

CAPÍTULO 2

EDITORA DA UFSC

FUNÇÕES

Neste capítulo introduziremos um dos mais fundamentais conceitos da matemática – o de função. O conceito de função refere-se essencialmente à correspondência entre conjuntos. Uma função associa a elementos de um conjunto, elementos de outro conjunto. Em nosso estudo os conjuntos envolvidos sempre serão subconjuntos de $\mathbb{R}$. As funções neles definidas são chamadas funções reais de variável real.

2.1 DEFINIÇÃO

Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$. Uma função $f: A \to B$ é uma *lei* ou regra que a *cada* elemento de A faz corresponder um único elemento de B. O conjunto A é chamado *domínio de f* e é denotado por D(f). B é chamado *contradomínio* ou *campo de valores* de f.

Escrevemos:

$$f: A \to B$$
$$x \to f(x)$$

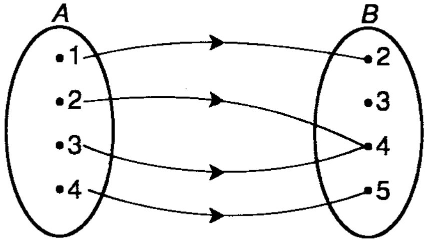
ou

$$A \xrightarrow{f} B$$
$$x \to y = f(x).$$

2.2 EXEMPLOS

Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$.

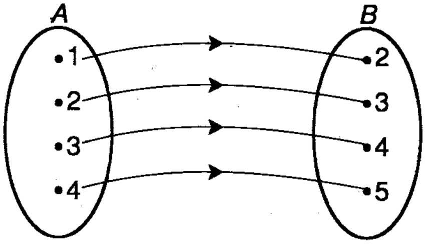
(*i*) $f: A \to B$ dada pelo diagrama abaixo é uma função de A em B.



(*ii*) $g: A \to B$

$x \to x + 1$

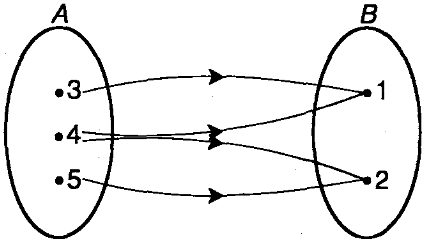
é uma função de A em B. Podemos representar g em diagrama.



2.3 CONTRA-EXEMPLOS

Sejam $A = \{3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2\}$.

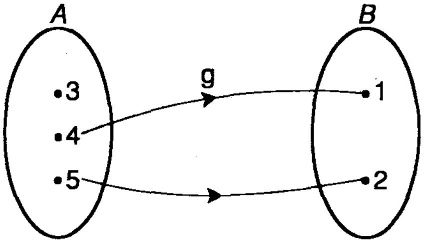
(*i*) $f: A \to B$ dada pelo diagrama a seguir, *não* é uma função de A em B, pois o elemento $4 \in A$ tem dois correspondentes em B.



(*ii*) $g\colon A \to B$

$x \to x - 3$

não é uma função de A em B, pois o elemento $3 \in A$ não tem correspondente em B. Podemos ver isto facilmente representando g em diagrama.



2.4 DEFINIÇÃO

Seja $f\colon A \to B$.

i) Dado $x \in A$, o elemento $f(x) \in B$ é chamado o *valor* da função f no ponto x ou *imagem* de x por f.

ii) O conjunto de todos os valores assumidos pela função é chamado *conjunto imagem de* f e é denotado por $\text{Im}(f)$.

2.5 EXEMPLO

Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = Z$ (conjunto dos inteiros) e $f: A \to B$ definida pela regra que a cada elemento de A faz corresponder o seu dobro.

Então:
- a regra que define f é $y = 2x$;
- a imagem do elemento 1 é 2, de 2 é 4 etc.;
- o domínio de f, $D(f) = A$;
- a imagem de f, $Im(f) = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

2.6 EXEMPLO

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to x^2$.

Então, $D(f) = \mathbb{R}$,

$Im(f) = [0, +\infty)$.

Quando trabalhamos com subconjuntos de $\mathbb{R}$, é usual caracterizar a função apenas pela *fórmula* ou *regra* que a define. Neste caso, entende-se que o domínio de f é o conjunto de todos os números reais para os quais a função está definida.

2.7 EXEMPLOS

Determinar o domínio e a imagem das funções abaixo:

(*i*) $f(x) = 1/x$.

Esta função só não é definida para $x = 0$. Logo, $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

$Im(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

(*ii*) $f(x) = \sqrt{x}$.

Para $x < 0$, $f(x)$ não está definida. Então, $D(f) = [o, +\infty)$ e $Im(f) = [0, +\infty)$.

(*iii*) $f(x) = -\sqrt{x-1}$.

$f(x)$ não está definida para $x < 1$. $D(f) = [1, \infty)$ e $Im(f) = (-\infty, 0]$.

(*iv*) $f(x) = |x|$.

$D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [0, +\infty)$.

2.8 GRÁFICOS

2.8.1 Definição. Seja f uma função. O gráfico de f é o conjunto de todos os pontos $(x, f(x))$ de um plano coordenado, onde x pertence ao domínio de f.

Para determinar o gráfico de uma função, assinalamos uma série de pontos, fazendo uma tabela que nos dá as coordenadas. No ponto em que estamos, não existe outro meio de determinar o gráfico a não ser este método rudimentar. No Capítulo 5, desenvolveremos técnicas mais eficazes para o traçado de gráficos.

2.8.2 Exemplos

(*i*) O gráfico da função $f(x) = x^2$ consiste em todos os pares $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $y = x^2$. Em outras palavras, é a coleção de todos os pares (x, x^2) do plano xy. A Figura 2.1 nos mostra o gráfico desta função, onde salientamos alguns pontos, de acordo com a tabela.

x	$y = x^2$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

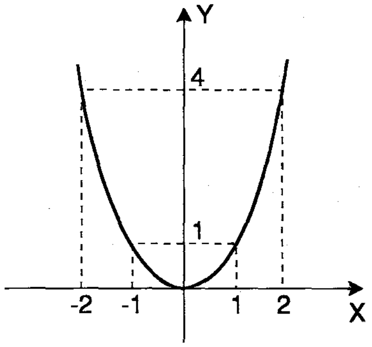


Figura 2-1

(*ii*) Consideremos a função $f(x) = x$. Os pontos de seu gráfico são os pares $(x, x) \in \mathbb{R}^2$. A Figura 2.2 mostra este gráfico.

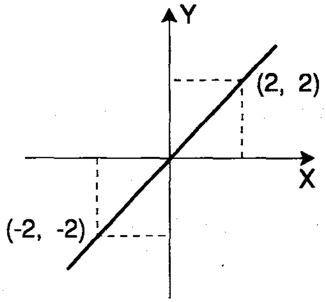


Figura 2-2

(*iii*) Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{se} \quad x \leq -2 \\ 2, & \text{se} \quad -2 < x \leq 2 \\ 4, & \text{se} \quad x > 2. \end{cases}$$

O gráfico de f pode ser visto na Figura 2.3.

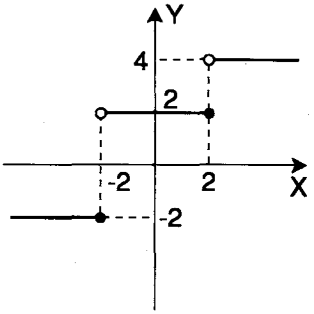


Figura 2-3

(iv) Seja $f(x) = |x|$. Quando $x \geq 0$, sabemos que $f(x) = x$. Quando $x < 0$, $f(x) = -x$. O gráfico de $|x|$ pode ser visto na Figura 2.4.

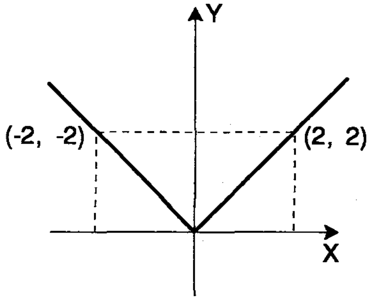


Figura 2-4

(v) Seja $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Então, $D(f) = I\!R - \{0\}$. A Figura 2.5 mostra o gráfico de $f(x) = 1/x$.

Podemos nos perguntar se, dada uma curva c no plano xy, ela sempre representa o gráfico de uma função. A resposta é não. Sabemos que, se f é uma função, um ponto de seu domínio pode ter somente uma imagem. Assim a curva c só representa o gráfico de uma função quando qualquer reta vertical corta a curva no máximo em um ponto.

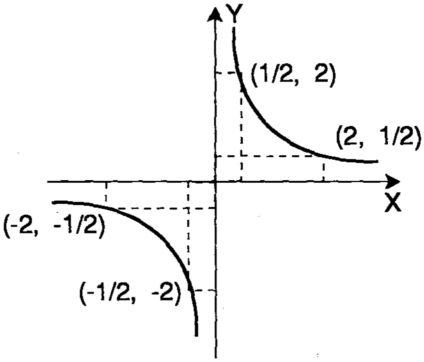


Figura 2-5

Na Figura 2.6 a curva c_1 representa o gráfico de uma função enquanto a curva c_2 não representa.

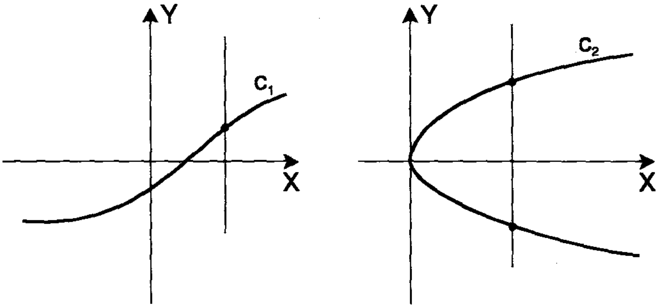


Figura 2-6

2.9 OPERAÇÕES

Assim como podemos adicionar, subtrair, multiplicar e dividir números, também podemos produzir novas funções através de operações. Estas operações são definidas como segue:

2.9.1 Definição. Dadas as funções f e g, sua soma $f + g$, diferença $f - g$, produto $f \cdot g$ e quociente f/g, são definidas por:

(*i*) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;

(*ii*) $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$;

(*iii*) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$;

(*iv*) $(f/g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

O domínio das funções $f + g$, $f - g$ e $f \cdot g$ é a intersecção dos domínios de f e g. O domínio de f/g é a intersecção dos domínios de f e g, excluindo-se os pontos x onde $g(x) = 0$.

2.9.2 Exemplo. Sejam $f(x) = \sqrt{5 - x}$ e $g(x) = \sqrt{x - 3}$. Então,

$(f + g)(x) = \sqrt{5 - x} + \sqrt{x - 3}$;

$(f - g)(x) = \sqrt{5 - x} - \sqrt{x - 3}$;

$(f \cdot g)(x) = \sqrt{5 - x} \cdot \sqrt{x - 3}$ e

$(f/g)(x) = \dfrac{\sqrt{5 - x}}{\sqrt{x - 3}}$.

Como $D(f) = (-\infty, 5]$ e $D(g) = [3, +\infty)$, então o domínio $f + g, f - g$ e $f \cdot g$ é $[3, 5]$.

O domínio de f/g é $(3, 5]$. O ponto 3 foi excluído porque $g(x) = 0$ quando $x = 3$.

2.9.3 Definição. Se f é uma função e k é um número real, definimos a função kf por

$(kf)(x) = kf(x)$.

O domínio de kf coincide com o domínio de f.

2.9.4 Exemplo. Seja $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ e $k = 3$.

Então, $(kf)(x) = 3\sqrt{x^2 - 4}$ e $D(kf) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

2.9.5 Definição. Dadas duas funções f e g, a função composta de g com f, denotada por $g_0 f$, é definida por

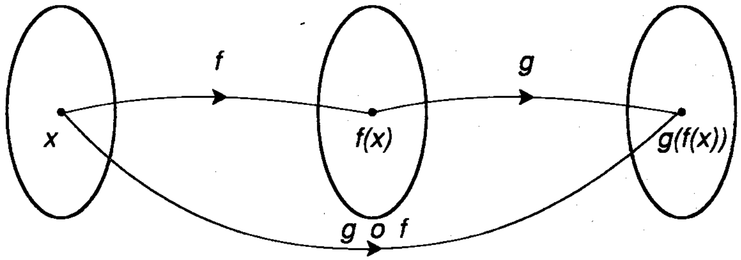
$(g_0 f)(x) = g(f(x))$.

O domínio de $g_0 f$ é o conjunto de todos os pontos x no domínio de f tais que $f(x)$ está no domínio de g.

Simbolicamente,

$D(g_0 f) = \{x \in D(f) \mid f(x) \in D(g)\}$.

Em diagrama,



2.9.6 Exemplos

(*i*) Sejam $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x - 1$. Encontrar $g_0 f$.

Temos,

$(g_0 f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} - 1$.

Como $D(f) = [0, +\infty)$ e $Im(f) = [0, +\infty) \subset D(g) = (-\infty, +\infty)$, então,

$D(g_0 f) = D(f) = [0, +\infty)$.

(*ii*) Sejam $f(x) = 2x - 3$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Encontrar: *a*) $g_0 f$; *b*) $f_0 g$; *c*) $f_0 f$ e *d*) $g_0 g$.

a) $(g_0 f)(x) = g(f(x)) = g(2x - 3) = \sqrt{2x - 3}$.

O domínio de f é $D(f) = (-\infty, +\infty)$ e o domínio de g é $D(g) = [0, +\infty)$. Assim, o domínio de $g_0 f$ é o conjunto de todos os números reais x, tais que $f(x) \in [0, +\infty)$. isto é, todos os números reais tais que $2x - 3 \geq 0$. Logo, $D(g_0 f) = [3/2, +\infty)$.

b) $(f_0 g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} - 3$ e

$D(f_0 g) = \{x \in D(g) = [0, +\infty) \,/\, g(x) \in D(f) = (-\infty, +\infty)\} = [0, +\infty)$.

c)
$$\begin{aligned} (f_0 f)(x) &= f(f(x)) = f(2x-3) \\ &= 2(2x-3) - 3 \\ &= 4x - 9. \\ D(f_0 f) &= (-\infty, +\infty). \end{aligned}$$

d) $(g_0 g)(x) = g(g(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$.

$D(g_0 g) = [0, +\infty)$.

(*iii*) Sejam $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 0 \\ x^2, & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$

e $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x < 0 \\ 2x, & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{se} \quad x > 1. \end{cases}$

Determinar $f_0 g$.

Se $x < 0$, $(f_0 g)(x) = f(g(x)) = f(1) = 1^2 = 1$.

Se $0 \leq x \leq 1$, $(f_0 g)(x) = f(g(x)) = f(2x)$.

Para $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, temos $0 \leq 2x \leq 1$. Logo, neste caso, $(f_0 g)(x) = (2x)^2 = 4x^2$.

Para $\frac{1}{2} < x \leq 1$ temos $2x > 1$. Assim, para este caso, $(f_0\, g)\,(x) = 0$. Se $x > 1$, $(f_0\, g)\,(x) = f\,(g\,(x)) = f\,(1) = 1$.

$$\text{Logo, } (f_0\, g)\,(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x < 0 \\ 4x^2, & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ 0, & \text{se} \quad 1/2 < x \leq 1 \\ 1, & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

O domínio de $f_0\, g$ é $D(f_0\, g) = (-\infty, +\infty)$.

O gráfico de $f_0\, g$ pode ser visto na Figura 2.7.

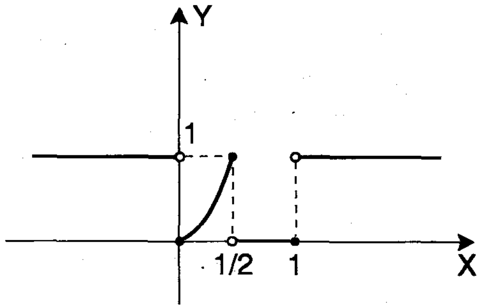


Figura 2-7

2.10 EXERCÍCIOS

1. Se $f\,(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 1}$, achar:

(*a*) $f\,(0)$

(*b*) $f\,(-2)$

(*c*) $f\,(1/t)$

(*d*) $f\,(x-2)$

(*e*) $f\,(1/2)$

(*f*) $f\,(t^2)$

2. Se $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x - 7}$, determine:

(*a*) $\dfrac{5f(-1) - 2f(0) + 3f(5)}{7}$

(*b*) $[f(-1/2)]^2$

(*c*) $f(3x - 2)$

(*d*) $f(t) + f(4/t)$

(*e*) $\dfrac{f(h) - f(0)}{h}$

(*f*) $f[f(5)]$.

3. Dada a função $f(x) = |x| - 2x$, calcular $f(-1)$, $f(1/2)$ e $f(-2/3)$. Mostrar que $f(|a|) = -|a|$.

4. Se $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ e $d = -a$, mostre que $f(f(x)) = x$.

5. Se $f(x) = x^2 + 2x$, achar $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$, $h \neq 0$ e interpretar o resultado geometricamente.

6. Dada $\phi(x) = \dfrac{x - 1}{2x + 7}$, forme as expressões $\phi(1/x)$ e $1/\phi(x)$.

7. Dada a função $f(x) = x^2 + 1$, mostrar que, para $a \neq 0, f(1/a) = f(a)/a^2$.

8. Dada a função $f(x) = 1/x$, mostrar que $f(1 + h) - f(1) = -h/(1 + h)$. Calcular $f(a + h) - f(a)$.

9. Seja $f(n)$ a soma dos n termos de uma progressão aritmética. Demonstrar que

$$f(n + 3) - 3f(n + 2) + 3f(n + 1) - f(n) = 0.$$

10. Exprimir como função de x:

a) A área de uma esfera de raio x.

b) A área de um cubo de aresta x.

c) A área total de uma caixa de volume dado V, sabendo-se que a base é um quadrado de lado x.

11. Exprimir o comprimento l de uma corda de um círculo de raio 4 cm, como uma função de sua distância x cm ao centro do círculo.

12. Seja $f(x) = (x-2)(8-x)$ para $2 \leq x \leq 8$.

a) Determine $f(5)$, $f(-1/2)$ e $f(1/2)$.

b) Qual o domínio da função $f(x)$?

c) Determine $f(1-2t)$ e indique o domínio.

d) Determine $f[f(3)]$ e $f[f(5)]$.

e) Trace o gráfico de $f(x)$.

13. Determinar o domínio das seguintes funções:

a) $y = x^2$

b) $y = \sqrt{4 - x^2}$

c) $y = \dfrac{1}{x-4}$

d) $y = \sqrt{x-2}$

e) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

f) $y = \sqrt{3+x} + \sqrt[4]{7-x}$

g) $y = \sqrt[3]{x+7} - \sqrt[5]{x+8}$

h) $y = \dfrac{x+a}{x-a}$

i) $y = |x+2| + 4, \ -5 \leq x \leq 2$

j) $y = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

k) $y = x - \dfrac{1}{x}$

l) $y = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$

14. Construir o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = x^2 + 8x + 14$

b) $f(x) = -x^2 + 4x - 1$

c) $y = (x-2)^2$

d) $y = -(x+2)^2$

e) $y = x^3$

f) $y = 4 - x^3$

g) $f(x) = |x|, -3 \leq x \leq 3$

h) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

i) $f(x) = \dfrac{-2}{x+3}$

j) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 0 \\ 1/2, & \text{se} \quad x = 0 \\ 1, & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$

k) $f(x) = \begin{cases} -x, & -2 \le x \le 0 \\ x, & 0 < x < 2 \end{cases}$

l) $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{se} \quad x \le 0 \\ 1, & \text{se} \quad 0 < x < 2 \\ x^2, & \text{se} \quad x \ge 2 \end{cases}$

m) $f(x) = \sqrt{2px}$.

15. Para cada uma das seguintes funções $f(x)$ esboce primeiro o gráfico de $y = f(x)$, depois o gráfico de $y = |f(x)|$ e finalmente o gráfico de $y = \dfrac{f(x)}{2} + \dfrac{|f(x)|}{2}$.

a) $f(x) = (x-2)(x+1)$;

b) $f(x) = x^2$;

c) $f(x) = -x^2$;

d) $f(x) = 4 - x^2$.

16. Sejam $g(x) = x - 3$ e $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x+3}, & x \ne -3 \\ k, & x = -3 \end{cases}$.

Calcule k tal que $f(x) = g(x)$ para todo x.

17. Para cada item, calcule $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, f/g, $f_0\, g$, $g_0 f$, $k \cdot f$, onde k é uma constante.

a) $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2 + 1$

b) $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = |x|$

c) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, $g(x) = 1/x$

d) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = x - 2$

e) $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = \sqrt{x-3}$

f) $f(x) = x^3$, $g(x) = 1 / \sqrt[3]{x}$.

18. Seja h definida por $h(x) = 2x - 7$. Calcule $h_0 h$, h^2 e $h + h$.

19. Sabendo que $f = g_0 h$, nos itens (*a*), (*c*) e (*d*) encontre a função h e no item (*b*) a função g.

a) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x + 1$

b) $f(x) = \sqrt{x+2}$, $h(x) = x + 2$.

c) $f(x) = a + bx$, $g(x) = x + a$.

d) $f(x) = |x^2 - 3x + 5|$, $g(x) = |x|$.

20. Sendo $f(x) = ax + b$, para quais valores de a e b tem-se $(f_0 f)(x) = 4x - 9$?

21. Sejam $f(x) = \sqrt{x-4}$ e $g(x) = 1/2x + 1, x \geq 3$. Calcule $f_0 g$. Dê o domínio e o conjunto imagem de $f(x)$, $g(x)$ e $(f_0 g)(x)$.

22. Sejam $f(x) = \begin{cases} 5x, & x \leq 0 \\ -x, & 0 < x \leq 8 \\ \sqrt{x}, & x > 8 \end{cases}$ e $g(x) = x^3$. Calcule $f_0 g$.

23. A função g é definida por $g(x) = x^2$. Defina uma função f tal que $(f_0 g)(x) = x$, para $x \geq 0$ e uma função h, tal que $(h_0 g)(x) = x$, para $x \leq 0$.

24. Se $f(x) = x^2$, encontre duas funções g para as quais $(f_0 g)(x) = 4x^2 - 12x + 9$.

25. Se $f(x) = x^2 - 2x + 1$, encontre uma função $g(x)$ tal que $(f / g)(x) = x - 1$.

26. Dadas as funções $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = 2x - 1$:

(*a*) Determine o domínio e o conjunto imagem de $f(x)$.

(*b*) Determine o domínio e o conjunto imagem de $g(x)$.

(*c*) Construa os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$.

(*d*) Calcule $f+g$, $f-g$, $g \cdot f$, f/g, $f_0 g$ e $g_0 f$.

(*e*) Determine o domínio das funções calculadas no item (*d*).

2.11 FUNÇÕES ESPECIAIS

A seguir vamos relacionar algumas funções que chamaremos de funções especiais.

2.11.1 Função Constante. É toda função do tipo $f(x) = k$, que associa a qualquer número real x um mesmo número real k.

A representação gráfica será sempre uma reta paralela ao eixo do x, passando por $y = k$.

O domínio da função $f(x) = k$ é $D(f) = \mathbb{R}$.

O conjunto imagem é o conjunto unitário $Im(f) = \{k\}$.

Exemplos.

(*i*) $f(x) = 2$ [Figura 2.8.(*a*)].

(*ii*) $f(x) = -3$ [Figura 2.8.(*b*)].

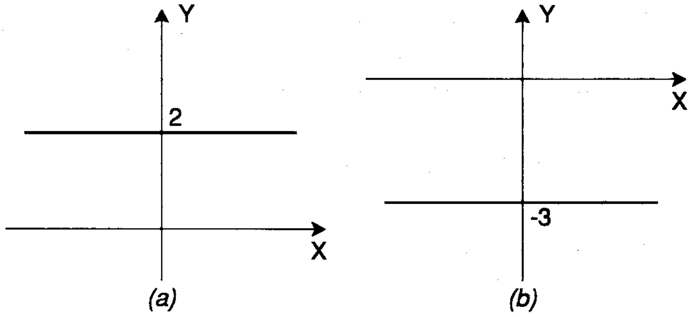


Figura 2-8

2.11.2 Função Identidade. É a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$.

O gráfico desta função é uma reta bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes (Figura 2.9).

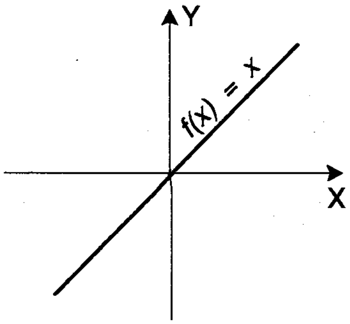


Figura 2-9

O domínio de $f(x) = x$ é $D(f) = \mathbb{R}$.

O conjunto imagem é $Im(f) = \mathbb{R}$.

2.11.3 Função do 1º Grau. Função do 1º grau é toda função que associa a cada número real x, o número real $ax + b$, $a \neq 0$. Os números reais a e b são chamados, respectivamente, de coeficiente angular e linear.

Quando $a > 0$ a função $f(x) = ax + b$ é crescente, isto é, à medida que x cresce, $f(x)$ também cresce. Quando $a < 0$ a função $f(x) = ax + b$ é decrescente, isto é, à medida que x cresce, $f(x)$ decresce.

O gráfico da função $f(x) = ax + b$ é uma reta não paralela aos eixos coordenados.

O domínio de $f(x) = ax + b$ é $D(f) = \mathbb{R}$.

O conjunto imagem é $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Exemplos.

(*i*) $f(x) = 2x + 3$ é uma função do 1º grau crescente porque $a > 0$ (Figura 2.10).

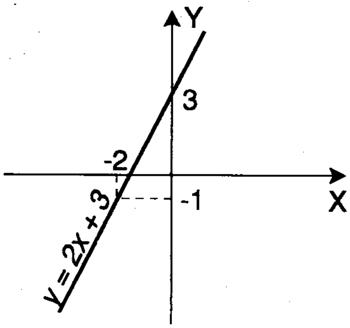


Figura 2-10

(*ii*) A função $f(x) = -3x + 1$ é uma função do 1º grau decrescente porque $a < 0$ (Figura 2.11).

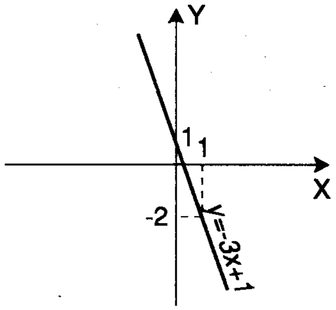


Figura 2-11

(*iii*) No movimento retilíneo uniforme, o espaço percorrido é uma função do tempo, expresso pela fórmula $s = s_0 + vt$, onde s_0 e v são constantes e $v \neq 0$. Esta função é do 1º grau.

2.11.4 Função Módulo. A função definida por $y = |x|$ chama-se função módulo. O seu domínio é o conjunto $D(f) = \mathbb{R}$ e o conjunto imagem é $Im(f) = [0, +\infty)$.

O gráfico desta função está ilustrado na Figura 2.12.

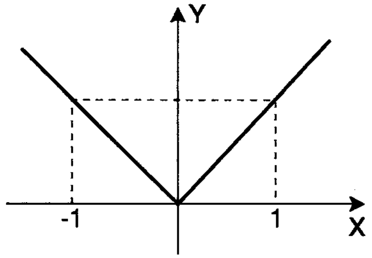


Figura 2-12

2.11.5 Função Quadrática. A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ é chamada função do 2º grau ou função quadrática. Seu domínio é $D(f) = \mathbb{R}$.

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo dos y. Se o coeficiente de x^2 for positivo ($a > 0$), a parábola tem a

concavidade voltada para cima. Se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

A intersecção do eixo de simetria com a parábola é um ponto chamado vértice.

A intersecção da parábola com o eixo dos x define os zeros da função. No quadro seguinte caracterizamos as diversas possibilidades (Figura 2.13).

$\Delta = b^2 - 4ac > 0$	$\Delta = b^2 - 4ac = 0$	$\Delta = b^2 - 4ac < 0$
a parábola intercepta o eixo dos x em dois pontos distintos.	a parábola intercepta o eixo dos x em um único ponto.	a parábola não intercepta o eixo dos x.

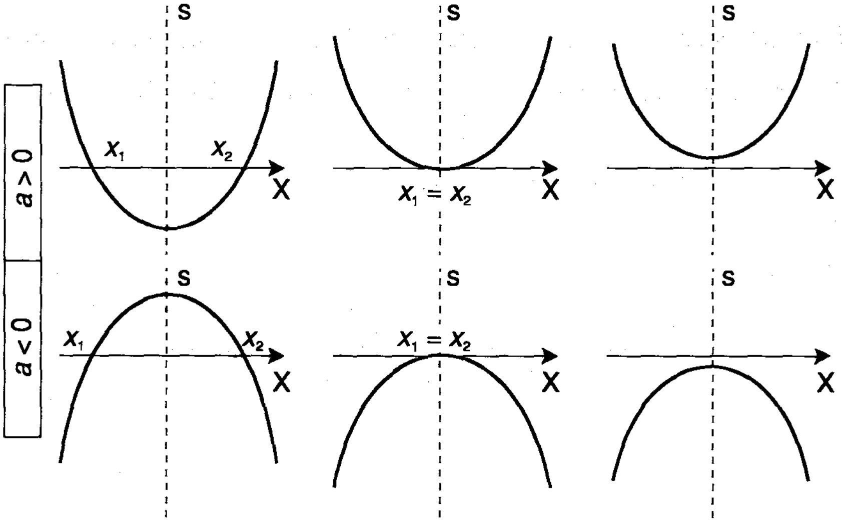


Figura 2-13

2.11.6 Função Polinomial. É a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ onde $a_0, a_1, \dots, a_n$, $a_0 \neq 0$, são números reais chamados coeficientes e n, inteiro não negativo, determina o grau da função.

O gráfico de uma função polinomial é uma curva que pode apresentar pontos de máximos e mínimos. Posteriormente faremos esboços de gráficos dessas funções com auxílio das derivadas.

O domínio é sempre o conjunto dos números reais.

Exemplos.

(*i*) A função constante $f(x) = k$ é uma função polinomial de grau zero.

(*ii*) A função $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ é uma função polinomial do 1º grau.

(*iii*) A função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ é uma função polinomial do 2º grau.

(*iv*) A função $f(x) = x^3$ é uma função polinomial chamada função cúbica.

(*v*) A função $f(x) = 5x^5 - 6x + 7$ é uma função polinomial de grau 5.

2.11.7 Função Racional. É a função definida como o quociente de duas funções polinomiais, isto é, $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, onde $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios e $q(x) \neq 0$.

O domínio da função racional é o conjunto dos reais excluindo aqueles x tais que $q(x) = 0$.

Exemplos.

(*i*) A função $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ é função racional de domínio $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ (Figura 2.14).

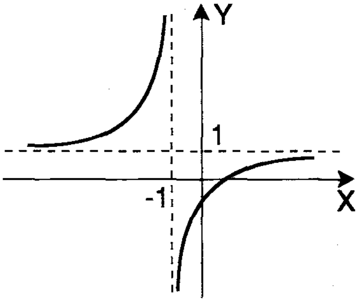


Figura 2-14

(*ii*) A função $f(x) = \dfrac{(x^2 + 3x - 4)(x^2 - 9)}{(x^2 + x - 12)(x + 3)}$ é racional de domínio

$D(f) = \mathbb{R} - \{-4, -3, 3\}$ (Figura 2.15).

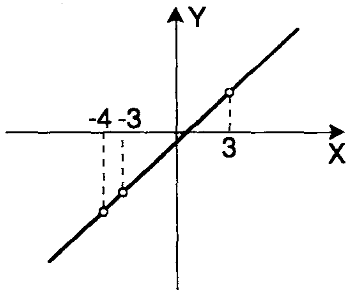


Figura 2-15

2.12 FUNÇÕES PARES E ÍMPARES

Dizemos que uma função $f(x)$ é *par* se, para todo x no domínio de f, $f(-x) = f(x)$.

Uma função $f(x)$ é *ímpar* se, para todo x no domínio de f, $f(-x) = -f(x)$.

O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo dos y e o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem.

Exemplos.

(*i*) A função $f(x) = x^2$ é par, já que $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

(*ii*) A função $f(x) = x^5 + x^3$ é ímpar, já que $f(-x) = (-x)^5 + (-x)^3 = -x^5 - x^3 = -(x^5 + x^3) = -f(x)$.

(*iii*) A função $f(x) = x^3 + 4$ não é par nem ímpar.

2.13 FUNÇÕES PERIÓDICAS

Dizemos que uma função $f(x)$ é periódica se existe um número real $T \neq 0$ tal que $f(x + T) = f(x)$ para todo $x \in D(f)$.

O número T é chamado período da função $f(x)$.

O gráfico de uma função periódica se repete a cada intervalo de comprimento $|T|$.

Exemplos.

(*i*) Mais adiante, mostraremos que as funções trigonométricas $f(x) = \text{sen } x$ e $f(x) = \cos x$ são periódicas de período $T = 2\pi$.

(*ii*) A função constante é periódica e tem como período qualquer número $T \neq 0$.

(*iii*) A Figura 2.16 mostra gráficos de outras funções periódicas.

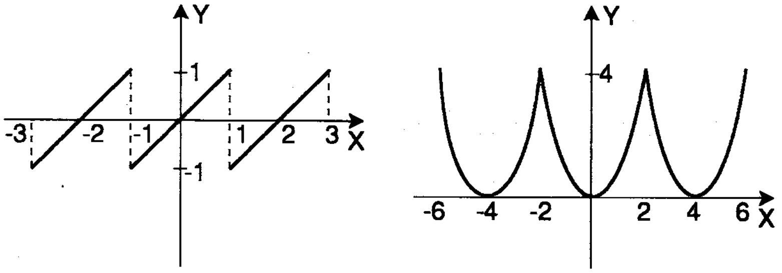


Figura 2-16

2.14 FUNÇÃO INVERSA

Seja $y = f(x)$ uma função de A em B ou $f: A \to B$. Se, para cada $y \in B$, existir *exatamente um* valor $x \in A$ tal que $y = f(x)$, então podemos definir uma função $g: B \to A$ tal que $x = g(y)$. A função g definida desta maneira é chamada função inversa de f e denotada por f^{-1}.

Exemplos.

(*i*) A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = 2x - 5$ tem como função inversa $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $x = \frac{1}{2}(y + 5)$.

(*ii*) A função $f\colon \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{-1\}$ definida por $y = \frac{x - 1}{3 - x}$ admite a função inversa $f^{-1}\colon \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R} - \{3\}$ definida por $x = \frac{1 + 3y}{y + 1}$.

Graficamente, podemos determinar se uma função admite inversa. Passando uma reta paralela ao eixo dos x, esta deve cortar o gráfico em apenas um ponto. A Figura 2.17 ilustra a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $y = x^2$ que não possui inversa. Fazendo uma restrição conveniente no domínio, essa mesma função pode admitir inversa. Por exemplo, para $x \geq 0$ existe a inversa $x_1 = \sqrt{y}$ e para $x \leq 0$ existe a inversa $x_2 = -\sqrt{y}$.

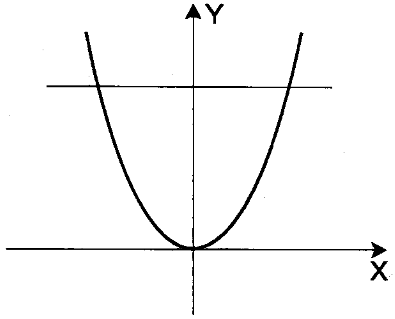


Figura 2-17

Para fazermos o gráfico da função inversa basta traçarmos a reta $y = x$ e observarmos a simetria.

Exemplos.

(*i*) A função $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, definida por $f(x) = x^2$ tem como inversa a função $g\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ dada por $g(x) = \sqrt{x}$ (ver Figura 2.18).

(*ii*) A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $y = x^3$ admite a função inversa $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \sqrt[3]{x}$ (ver Figura 2.19).

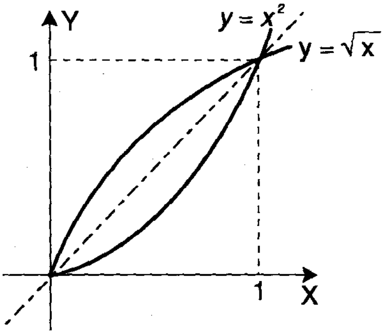


Figura 2-18

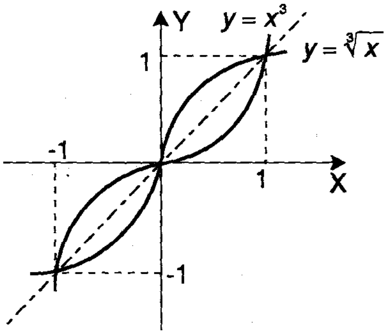


Figura 2-19

2.15 ALGUMAS FUNÇÕES ELEMENTARES

2.15.1 Função Exponencial. Chamamos de função exponencial de base a, a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada x real o número real a^x, sendo a um número real, $0 < a \neq 1$,

ou, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to y = a^x$.

O domínio da função exponencial é $D(f) = \mathbb{R}$. A imagem é $Im(f) = (0, \infty)$. Podemos também denotar $Im(f) = (0, \infty) = R_+^*$.

Com relação ao gráfico da função $f(x) = a^x$ (Figura 2.20) podemos afirmar:

1) a curva que o representa está toda acima do eixo das abcissas, pois $y = a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$;

2) corta o eixo das ordenadas no ponto (0, 1);

3) $f(x) = a^x$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

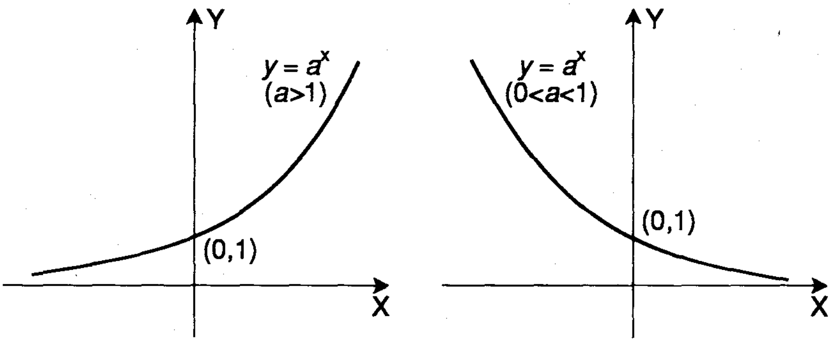


Figura 2-20

2.15.2 Função Logarítmica. Dado um número real a $(0 < a \neq 1)$, chamamos função logarítmica de base a a função de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada x o número $\log_a x$, isto é,

$$f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow y = \log_a x.$$

As funções f de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a x$ e g de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$ definida por $g(x) = a^x$; $0 < a \neq 1$, são inversas uma da outra.

Temos $D(f) = \mathbb{R}_+^*$ e $Im(f) = \mathbb{R}$.

Com relação ao gráfico da função $f(x) = \log_a x$ $(0 < a \neq 1)$ (Figura 2.21), podemos afirmar:

1) está todo à direita do eixo y;

2) corta o eixo das abscissas no ponto $(1, 0)$;

3) $f(x) = \log_a x$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$;

4) é simétrico ao gráfico da função $g(x) = a^x$ em relação a reta $y = x$.

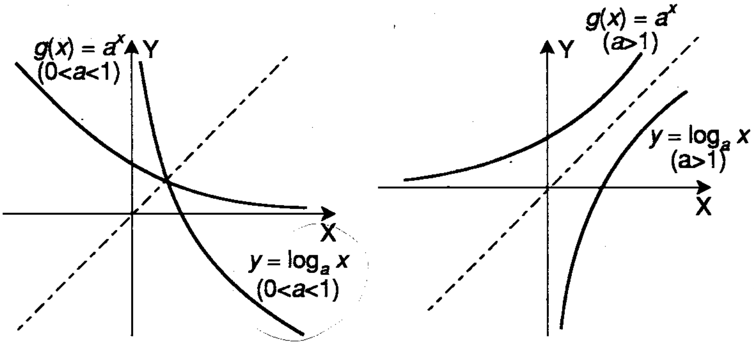


Figura 2-21

2.15.3 Funções Trigonométricas

FUNÇÃO SENO

Seja x um número real. Marcamos um ângulo com medida x radianos, na circunferência unitária com centro na origem (ver Figura 2.22). Seja P o ponto de intersecção do lado terminal do ângulo x, com essa circunferência.

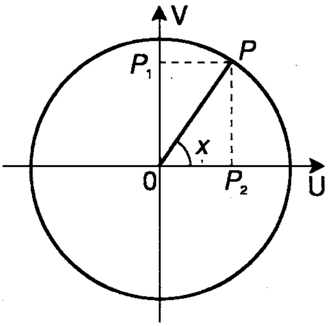


Figura 2-22

Denominamos seno de x a ordenada $\overline{OP_1}$ do ponto P em relação ao sistema $U\,0\,V$.

Definimos a *função seno* como a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que a cada $x \in \mathbb{R}$ faz corresponder o número real $y = \text{sen } x$, isto é,

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow y = \text{sen } x.$$

O domínio da função seno é $\mathbb{R}$ e o conjunto imagem é o intervalo $[-1, 1]$.

A função $y = \text{sen } x$ é periódica e seu período é 2π, já que $\text{sen }(x + 2\pi) = \text{sen } x$.

Em alguns intervalos sen x é crescente e em outros é decrescente. Por exemplo, nos intervalos $[0, \pi/2]$ e $[3\pi/2, 2\pi]$ sen x é crescente. Já no intervalo $[\pi/2, 3\pi/2]$ ela é decrescente.

O gráfico da função $f(x) = \text{sen } x$, denominado senóide, pode ser visto na Figura 2.23.

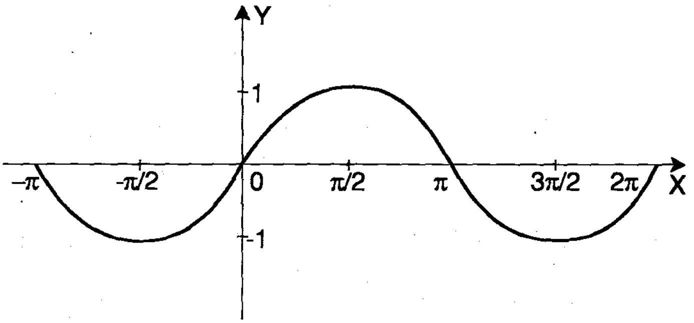


Figura 2-23

FUNÇÃO COSSENO

Seja x um número real. Denominamos cosseno de x a abcissa $\overline{OP_2}$ do ponto P em relação ao sistema $U\,0\,V$ (Figura 2.22). Definimos a *função cosseno* como a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que a cada $x \in \mathbb{R}$ faz corresponder o número real $y = \cos x$, isto é,

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow y = \cos x.$$

O domínio da função cosseno é $\mathbb{R}$ e o conjunto imagem é o intervalo $[-1, 1]$.

Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. Portanto, a função cosseno é periódica e seu período é 2π.

Em alguns intervalos a função cosseno é crescente e em outros decrescente. Por exemplo, no intervalo $[0, \pi]$ a função $f(x) = \cos x$ é decrescente. Já no intervalo $[\pi, 2\pi]$ ela é crescente.

O gráfico da função $f(x) = \cos x$, denominado cossenóide, pode ser visto na Figura 2.24.

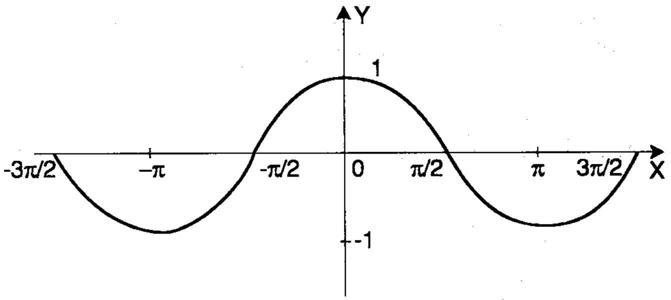


Figura 2-24

FUNÇÕES TANGENTE, COTANGENTE, SECANTE E COSSECANTE

Estas funções são definidas em termos de seno e cosseno.

As funções tangente e secante são, respectivamente, denotadas pelos símbolos tg e sec e definidas por:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad ; \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

para todos os números reais x tais que $\cos x \neq 0$.

As funções cotangente e cossecante são, respectivamente, denotadas por cotg e cosec e definidas por:

$$\text{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x} \quad ; \quad \text{cosec}\, x = \frac{1}{\text{sen}\, x}$$

para todos os números reais x tais que sen $x \neq 0$.

O domínio das funções tg x e sec x é o conjunto de todos os números reais x para os quais cos $x \neq 0$. Como cos $x = 0$ quando x for $\pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \ldots$, isto é, quando $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in Z$, temos $D(\text{tg}) = D(\text{sec}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi/2 + n\pi, n \in Z\}$.

Analogamente, o domínio das funções cotangente e cossecante é o conjunto de todos os números reais x para os quais sen $x \neq 0$. Como sen $x = 0$ para $x = n\pi$, $n \in Z$, temos:

$$D(\text{cotg}) = D(\text{cosec}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq n\pi, n \in Z\}.$$

Os gráficos dessas funções podem ser vistos na Figura 2.25. Podemos observar que as funções tangente e cotangente são periódicas de período π e que as funções secante e cossecante são periódicas de período 2π.

2.15.4 Funções Trigonométricas Inversas.

Conforme definição da seção 2.14, sabemos que é impossível definir uma função inversa para a função $y = \text{sen}\, x$, porque a cada valor de y corresponde uma infinidade de valores de x.

Portanto, para definirmos a função inversa de $y = \text{sen}\, x$ necessitamos restringir o domínio.

Este fato ocorre com todas as demais funções trigonométricas.

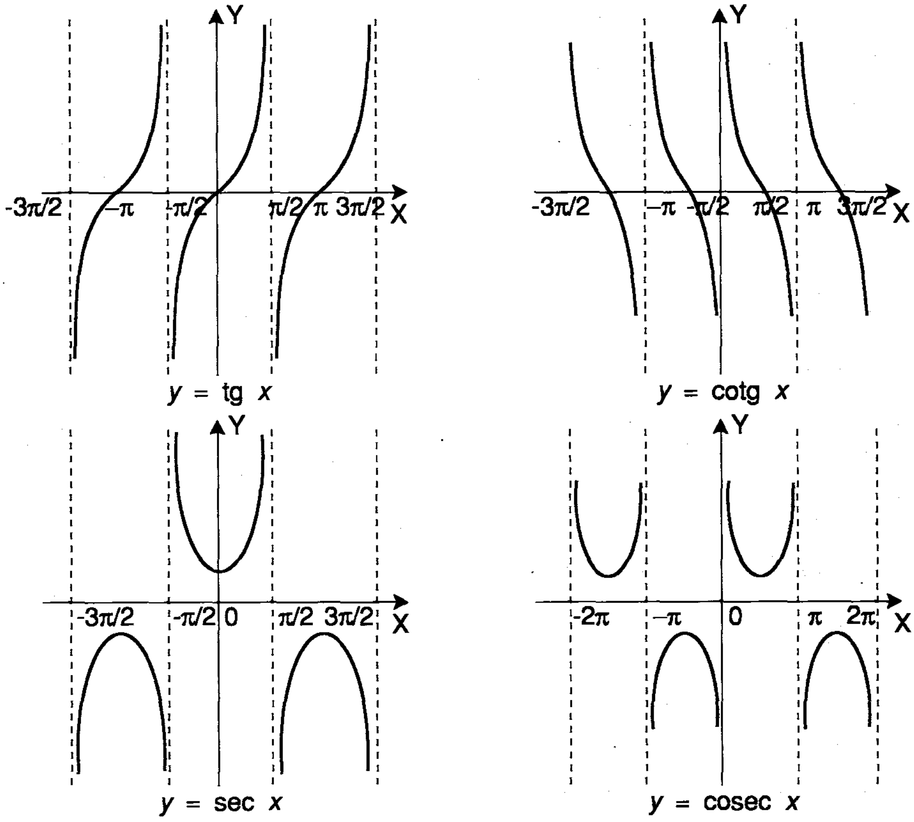


Figura 2-25

FUNÇÃO ARCO SENO

Seja f: $[-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ a função definida por $f(x) = \text{sen}\, x$. A função inversa da $f(x)$, será chamada arco seno, e denotada por

f^{-1}: $[-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, onde $f^{-1}(x) = \text{arc sen}\, x$.

Simbolicamente, para $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$, escrevemos a equivalência:

$$y = \text{arc sen}\, x \Leftrightarrow \text{sen}\, y = x$$

O gráfico desta função nos mostra uma função crescente (Figura 2.26).

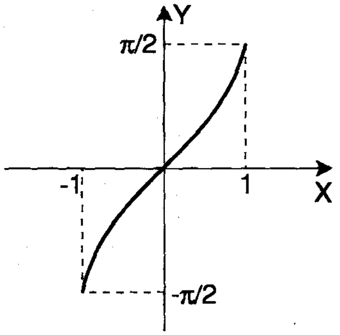


Figura 2-26

Observamos que na definição da função arco seno poderíamos ter restringido o domínio de $y = \text{sen}\, x$ a qualquer dos seguintes intervalos:

$[\pi/2, 3\pi/2]$, $[3\pi/2, 5\pi/2]$, $[5\pi/2, 7\pi/2]$, ..., ou

$[-3\pi/2, -\pi/2]$, $[-5\pi/2, -3\pi/2]$, $[-7\pi/2, -5\pi/2]$, ...

FUNÇÃO ARCO COSSENO

Seja $f\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$ a função definida por $f(x) = \cos x$. A função inversa de f será chamada arco cosseno, e denotada por $f^{-1}\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$. onde $f^{-1}(x) = \text{arc cos}\, x$.

Simbolicamente, para $0 \leq y \leq \pi$, escrevemos:

$$y = \text{arc cos}\, x \Leftrightarrow x = \cos y$$

O gráfico desta função nos mostra uma função decrescente (Figura 2.27).

Observação:

A função $y = \text{arc cos}\, x$ pode ser definida também pela equação

$$\text{arc cos}\, x = \frac{\pi}{2} - \text{arc sen}\, x$$

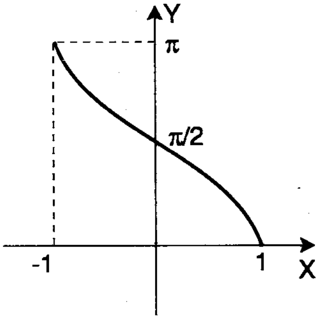


Figura 2-27

De fato, utilizando o triângulo retângulo (Figura 2.28), temos:

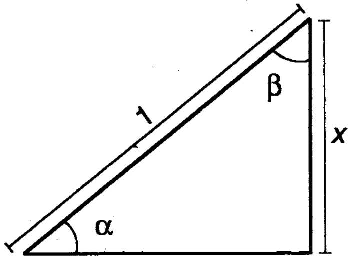


Figura 2-28

Os ângulos α e β são complementares, ou

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

e

$$x = \text{sen}\ \alpha = \cos \beta.$$

Portanto, $\alpha = \text{arc sen}\ x$ e $\beta = \text{arc cos}\ x$. Concluímos que

$$\text{arc cos}\ x = \frac{\pi}{2} - \text{arc sen}\ x.$$

FUNÇÃO ARCO TANGENTE

A função inversa da tangente é definida para todo número real.

Seja f: $(-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \text{tg } x$. A função inversa de f, será chamada *função arco tangente* e denotada por f^{-1}: $\mathbb{R} \to (-\pi/2, +\pi/2)$, onde $f^{-1}(x) = \text{arc tg } x$.

Simbolicamente, para $-\pi/2 < y < \pi/2$, escrevemos

$$y = \text{arc tg } x \Leftrightarrow x = \text{tg } y$$

O gráfico nos mostra que quando x se torna muito grande, arc tg x aproxima-se de $\pi/2$. Quando x se torna muito pequeno, arc tg x se aproxima de $-\pi/2$.

É uma função crescente (ver Figura 2-29).

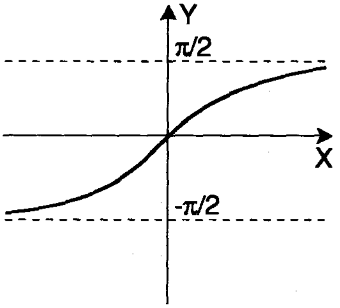


Figura 2-29

OUTRAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Podemos definir a função inversa da cotangente como

$$y = \text{arc cotg } x = \frac{\pi}{2} - \text{arc tg } x$$

onde $0 < y < \pi$.

As funções inversas da secante e da cossecante serão funções de x no domínio $|x| \geq 1$, desde que adotemos as definições:

$$y = \text{arc sec } x = \text{arc cos } (1/x)$$
$$y = \text{arc cosec } x = \text{arc sen } (1/x).$$

A Figura 2.30 mostra o gráfico dessas funções trigonométricas inversas.

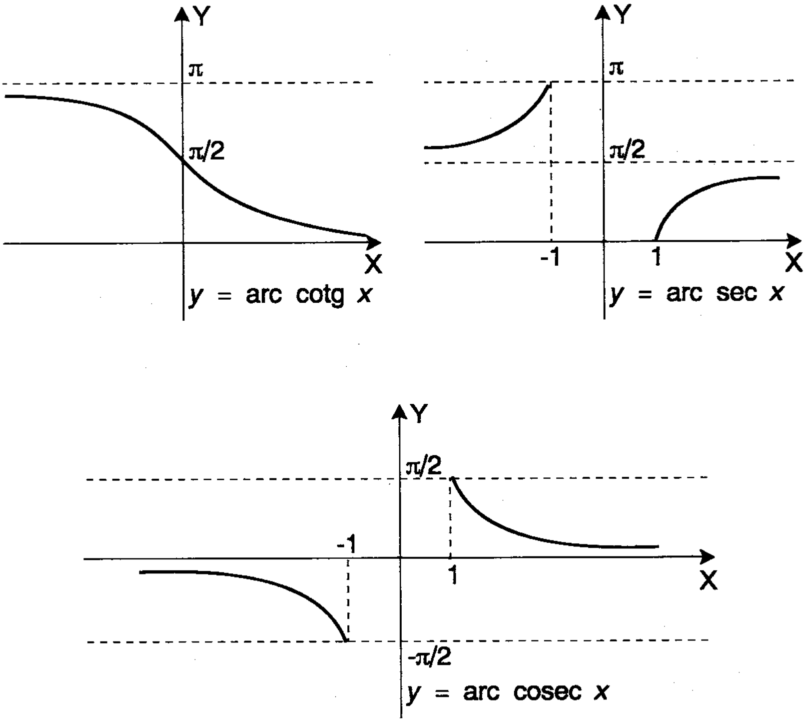


Figura 2-30

2.15.5 Funções Hiperbólicas

As expressões exponenciais

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

ocorrem freqüentemente na Matemática Aplicada.

Estas expressões definem, respectivamente, as funções seno hiperbólico de x e cosseno hiperbólico de x.

O comportamento dessas funções nos leva a fazer uma analogia com as funções trigonométricas.

SENO HIPERBÓLICO E COSSENO HIPERBÓLICO

A função seno hiperbólico, denotada por senh, e a função cosseno hiperbólico, denotada por cosh, são definidas, respectivamente, por:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

O domínio e imagem das funções senh e cosh são:

$$D(\text{senh}) = (-\infty, +\infty),$$

$$D(\text{cosh}) = (-\infty, +\infty),$$

$$\text{Im}(\text{senh}) = (-\infty, +\infty) \text{ e}$$

$$\text{Im}(\text{cosh}) = [1, +\infty).$$

O gráfico da função senh é dado na Figura 2.31(a). Pode ser obtido pelo método chamado adição de ordenadas. Para usar essa técnica, esboçamos os gráficos das funções $\frac{1}{2}e^x$ e $-\frac{1}{2}e^{-x}$ (tracejados) e somamos as respectivas ordenadas.

Da mesma forma obtemos o gráfico da função cosh [Figura 2.31 (b)].

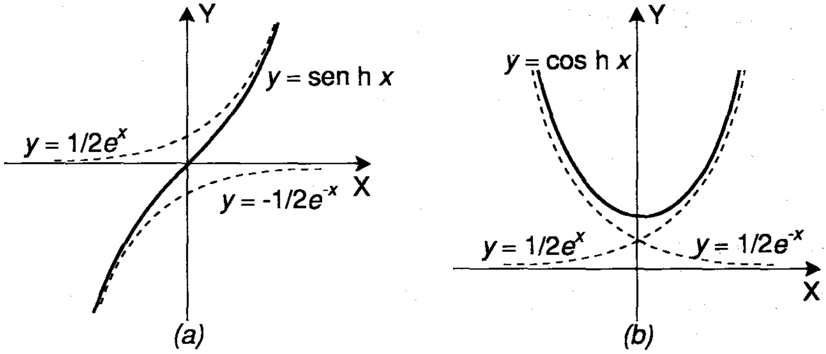


Figura 2-31

A função cosseno hiperbólico pode ser usada para descrever a forma de um cabo ou corrente flexível, uniforme, cujas extremidades estão fixas a uma mesma altura.

Na Figura 2.32 desenhamos um fio de telefone ou de luz. Observamos que a curva representada pelo fio aparenta a forma de uma parábola. No entanto, é possível mostrar que a equação correspondente é:

$y = \cosh\,(x/a), \quad a \in \mathbb{R}.$

Esta curva recebe a denominação *catenária*.

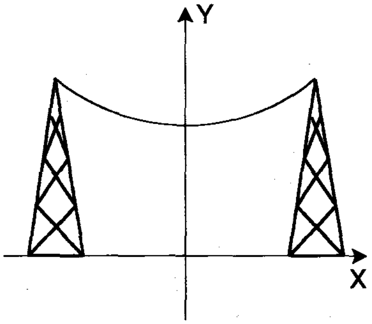


Figura 2-32

As quatro funções hiperbólicas restantes podem ser definidas em termos de senh e cosh.

TANGENTE, COTANGENTE, SECANTE E COSSECANTE HIPERBÓLICAS

As funções tangente, cotangente, secante e cossecante hiperbólicas, denotadas respectivamente por tgh, cotgh, sech e cosech são definidas por:

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \; ;$$

$$\operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \; ;$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \qquad \text{e}$$

$$\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \; .$$

Os gráficos dessas funções podem ser vistos na Figura 2.33.

Muitas identidades análogas às conhecidas para funções trigonométricas são válidas para as funções hiperbólicas. Por exemplo, pode-se verificar que

$$\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1.$$

Esta identidade é análoga à identidade trigonométrica $\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u = 1$ e pode ser usada para justificar o adjetivo "hiperbólico" nas definições.

De fato, a identidade $\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1$ mostra que o ponto P de coordenadas $(\cosh u, \operatorname{senh} u)$ está sobre a hipérbole unitária $x^2 - y^2 = 1$.

Fazendo u variar no conjunto dos reais, o ponto P descreve o ramo direito da hipérbole. Observamos que aqui a variável real u não representa um ângulo, como acontece nas funções trigonométricas. No entanto, pode-se estabelecer uma relação interessante, que fornece uma interpretação geométrica para o parâmetro u.

Na Figura 2.34(a), representamos o círculo unitário, onde demarcamos um ponto P $(\cos t, \operatorname{sen} t)$. A área A_C do setor circular $\overset{\frown}{QOP}$ é dada por

$$A_C = \frac{1}{2} \cdot t \cdot (1)^2$$

$$= \frac{1}{2}\, t$$

e portanto, $t = 2A_C$.

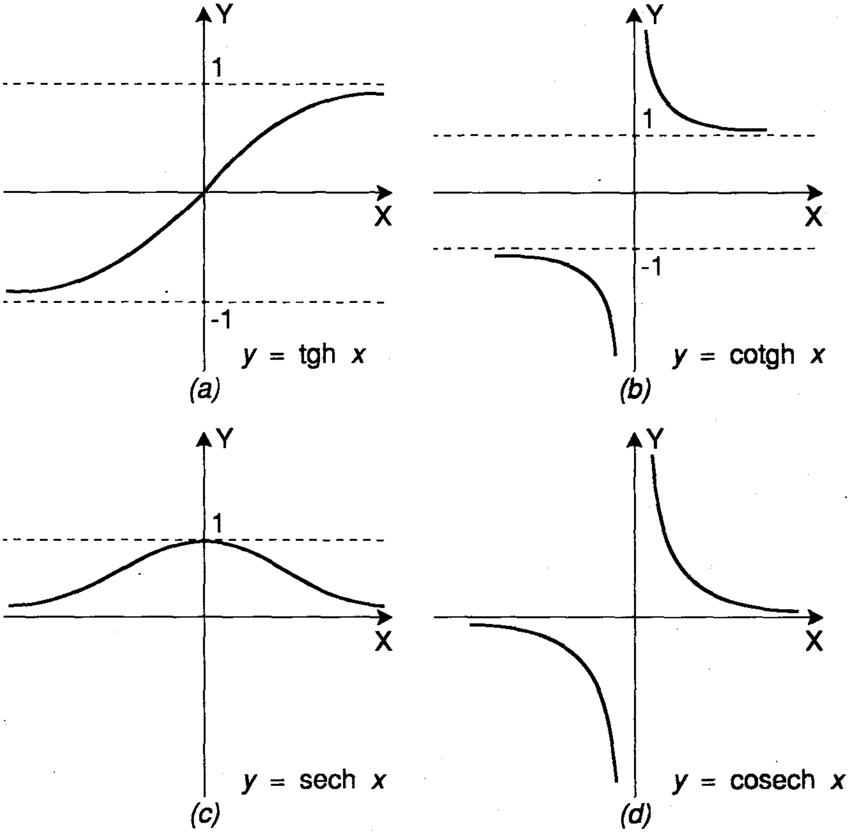


Figura 2-33

Uma relação análoga a esta, é válida para as funções hiperbólicas. De fato, é possível mostrar que a área A_h, do setor hiperbólico $\overset{\frown}{QOP}$ da Figura 2.34(*b*), é dada por

$$A_h = \frac{1}{2}\,u$$

e dessa forma, $u = 2A_h$.

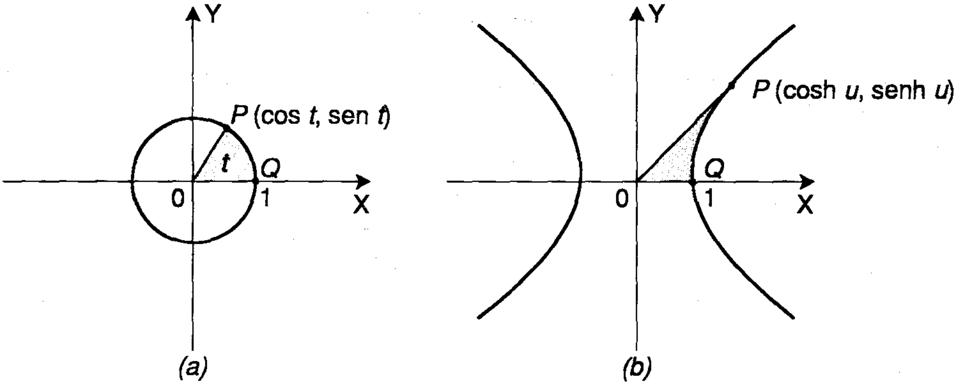


Figura 2-34

Relacionamos abaixo, outras identidades que podem facilmente ser verificadas:

$$\text{tgh}\, u = \frac{1}{\text{cotgh}\, u};$$

$$1 - \text{tgh}^2\, u = \text{sech}^2\, u \quad \text{e}$$

$$1 - \text{cotgh}^2\, u = -\text{cosech}^2\, u.$$

2.15.6 Funções Hiperbólicas Inversas

Nesta seção estudaremos as funções hiperbólicas inversas. Para isso, devemos nos lembrar das definições da seção 2.15.5 e observar os gráficos das Figuras 2.31(*a*) e (*b*) e 2.33.

FUNÇÃO INVERSA DO SENO HIPERBÓLICO

Analisando o gráfico da função $y = \text{senh}\, x$ [Figura 2.31(*a*)], vemos que a cada valor de y na imagem corresponde um único valor de x no domínio. Assim, podemos definir a sua função inversa.

A função inversa do seno hiperbólico, chamada argumento do seno hiperbólico e denotada por arg senh, é definida como segue:

$$\boxed{y = \text{arg senh}\, x \Leftrightarrow x = \text{senh}\, y}$$

Temos D(arg senh x) = Im (arg senh x) = $\mathbb{R}$.

O gráfico da função arg senh pode ser visto na Figura 2.35. Ele é obtido fazendo uma reflexão do gráfico da função senh sobre a reta $y = x$.

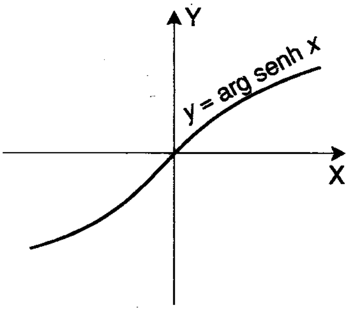


Figura 2-35

FUNÇÃO INVERSA DO COSSENO HIPERBÓLICO

Para definirmos a inversa da função cosseno hiperbólico precisamos restringir o seu domínio, pois como podemos ver no seu gráfico, Figura 2.31(*b*), a cada valor de y na imagem, exceto $y = 1$, correspondem dois valores de x no domínio.

Seja f: $[0, +\infty) \to [1, +\infty)$ a função dada por $f(x) = \cosh x$. A sua função inversa é chamada argumento do cosseno hiperbólico e é denotada por arg cosh. Simbolicamente, para $y \geq 0$, escrevemos

$$y = \text{arg cosh } x \Leftrightarrow x = \cosh y$$

Temos D(arg cosh x) = $[1, +\infty)$ e Im(arg cosh x) = $[0, +\infty)$.

O gráfico pode ser visto na Figura 2.36.

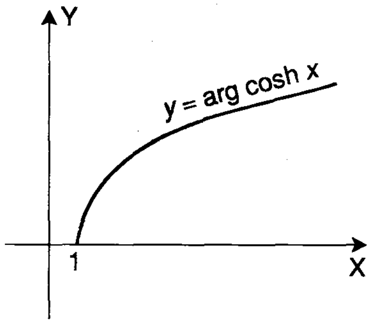


Figura 2-36

INVERSAS DAS FUNÇÕES TANGENTE HIPERBÓLICA, COTANGENTE HIPERBÓLICA E COSSECANTE HIPERBÓLICA

Para definirmos as inversas destas funções não necessitamos restringir os seus domínios, pois a cada valor de y na imagem corresponde um único valor de x no domínio [ver Figura 2.33,(*a*), (*b*) e (*d*)].

As funções inversas da tangente hiperbólica, cotangente hiperbólica e cossecante hiperbólica, denotadas respectivamente por arg tgh, arg cotgh e arg cosech, são definidas como segue:

y	=	arg tgh x	$\Leftrightarrow x = \text{tgh } y$
y	=	arg cotgh x	$\Leftrightarrow x = \text{cotgh } y$
y	=	arg cosech x	$\Leftrightarrow x = \text{cosech } y$

A Figura 2.37 mostra um esboço dos gráficos dessas funções.

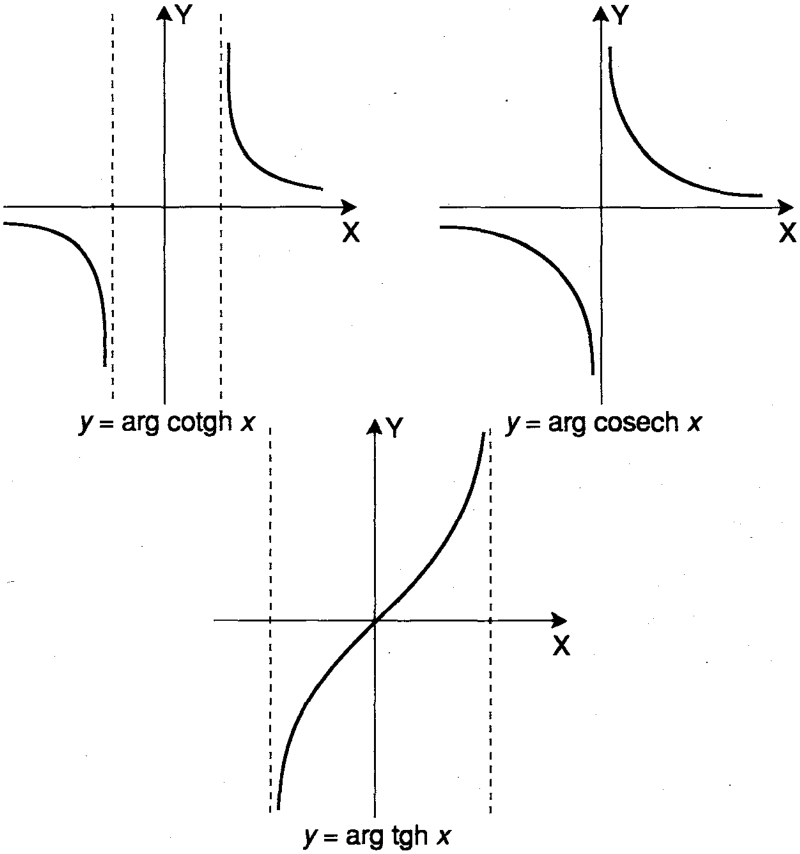


Figura 2-37

INVERSA DA FUNÇÃO SECANTE HIPERBÓLICA

Da mesma forma que ocorreu com a inversa do cosseno hiperbólico, para definirmos a inversa da função secante hiperbólica devemos restringir seu domínio.

Seja f: $[0, +\infty) \to [0, 1]$ a função dada por $f(x) = \text{sech}\, x$. A sua função inversa é denotada por arg sech. Para $y \geq 0$, temos

$$y = \text{arg sech}\, x \Leftrightarrow x = \text{sech}\, y$$

Na Figura 2.38 podemos ver um esboço do gráfico da função arg sech.

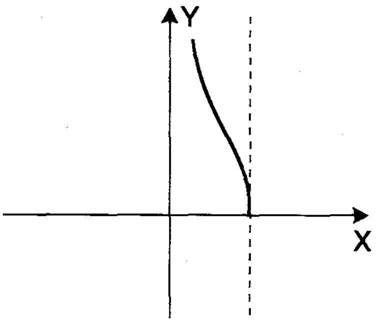


Figura 2-38

Podemos exprimir as funções hiperbólicas inversas em termos de logaritmos naturais. Isso decorre do fato das funções hiperbólicas serem definidas em termos da função exponencial, que admite a função logaritmo natural como inversa.

A seguir apresentamos essas expressões, que aparecem freqüentemente na integração.

$$\text{arg senh}\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \quad x \text{ qualquer;}$$

$$\text{arg cosh}\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \; x \geq 1;$$

$$\text{arg tgh}\, x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right), \quad -1 < x < 1;$$

$$\text{arg cotgh}\, x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right), \quad |x| > 1;$$

$$\text{arg sech}\, x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right), \quad 0 < x \leq 1;$$

$$\text{arg cosech}\, x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|}\right), \; x \neq 0.$$

EXEMPLO. Mostrar que arg senh $x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, para todo valor de x.

Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $y = \text{arg senh } x$.

Então, $x = \text{senh } y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$

e portanto,

$$e^y - 2x - e^{-y} = 0.$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por e^y, temos

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$$

Resolvendo esta equação para e^y pela fórmula quadrática, obtemos

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}\,.$$

Como $e^y > 0$ para qualquer y, a solução envolvendo o sinal negativo deve ser descartada. Portanto,

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}\,.$$

Tomando o logaritmo natural, temos

$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, ou seja,

$$\text{arg senh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})\,.$$

2.16 EXERCÍCIOS

1. Construir os gráficos das funções de 1º grau. Dar o domínio e o conjunto imagem.

   (*a*) $y = kx$; se $k = 0, 1, 2, 1/2, -1, -2$

   (*b*) $y = x + b$, se $b = 0, 1, -1$

   (*c*) $y = 1{,}5x + 2$.

2. Construir os gráficos das funções quadráticas. Dar o domínio e o conjunto imagem.

(*a*) $y = ax^2$, se $a = 1$, $1/2$ e -2

(*b*) $y = x^2 + c$, se $c = 0, 1, 1/2, -3$

(*c*) $y = y_0 + (x-1)^2$, se $y_0 = 0, 1, -1$

(*d*) $y = ax^2 + bx + c$, se $a = 1, b = -2$ e $c = 5$.

3. Construir os gráficos das funções polinomiais. Dar o domínio e o conjunto imagem.

(*a*) $y = 2 + (x-1)^3$ (*b*) $y = x^4$ (*c*) $y = 2x^2 - 4$.

4. Construir os gráficos das funções racionais. Dar o domínio e o conjunto imagem.

(*a*) $y = -\dfrac{2}{(x-1)^2}$ (*b*) $y = \dfrac{1}{x}$ (*c*) $y = \dfrac{x-1}{x+4}$

5. A função $f(x)$ é do 1º grau. Escreva a função se

$f(-1) = 2$ e $f(2) = 3$.

6. Determinar quais das seguintes funções são pares ou ímpares

(*a*) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1$ (*b*) $f(x) = 5x^3 - 2x$

(*c*) $f(s) = s^2 + 2s + 2$ (*d*) $f(t) = t^6 - 4$

(*e*) $f(x) = |x|$ (*f*) $f(y) = \dfrac{y^3 - y}{y^2 + 1}$

(*g*) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ (*h*) $f(x) = \dfrac{1}{2}(a^x + a^{-x})$

(*i*) $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$ (*j*) $f(x) = \ln (x + \sqrt{1 + x^2})$.

7. Demostre que se f e g são funções ímpares, então $(f + g)$ e $(f - g)$ são também funções ímpares.

8. Demonstre que se f e g são funções ímpares, então $f \cdot g$ e f / g são funções pares.

9. Mostre que a função $\frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ é par e que a função $\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$ é ímpar.

10. Demonstre que qualquer função $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ pode ser expressa como a soma de uma função par com uma função ímpar.

11. Expresse as funções seguintes como a soma de uma função par e uma função ímpar

(*a*) $f(x) = x^2 + 2$

(*b*) $f(x) = x^3 - 1$

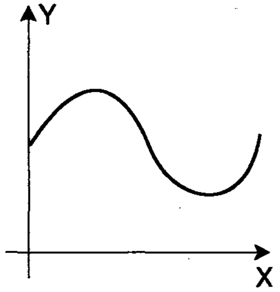
(*c*) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

(*d*) $f(x) = |x| + |x - 1|$.

12. Seja $f(x)$ uma função, cujo gráfico para $x \geq 0$, tem o aspecto indicado na figura. Completar esse gráfico no domínio $x < 0$, se:

a) $f(x)$ é par;

b) $f(x)$ é ímpar.



13. Em cada um dos exercícios determine a fórmula da função inversa. Fazer os gráficos da função dada e de sua inversa.

(*a*) $y = 3x + 4$

(*b*) $y = \dfrac{1}{x - a}$

(*c*) $y = \dfrac{x + a}{x - a}$

(*d*) $y = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$

(*e*) $y = \sqrt{x-1}, \quad x \geq 1$

(*f*) $y = -\sqrt{a-x}, \quad x \leq a$

(*g*) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}, \quad x \geq 0$

(*h*) $y = x^2 - 4, \quad x \leq 0$

(*i*) $y = x^2 - 4, \quad x \geq 0.$

14. Mostrar que a função $y = f(x) = \dfrac{x+2}{2x-1}$ coincide com a sua inversa, isto é, $x = f(y)$ ou $f(f(x)) = x$.

15. Dada a função $y = f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ definida para todo x real, demonstrar que sua inversa é a função $x = g(y) = \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ definida para $|y| < 1$.

16. Seja $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 1 \\ x^2, & \text{se } 1 \leq x \leq 9 \\ 27\sqrt{x}, & \text{se } x > 9. \end{cases}$

Verifique que f tem uma função inversa e encontre $f^{-1}(x)$.

17. Se $f(x)$ e $g(x)$ são periódicas de período T, prove que:

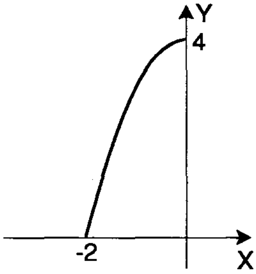
(*a*) $h(x) = f(x) + g(x)$ tem período T.

(*b*) $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ é periódica de período T.

(*c*) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0 \ \forall \ x$, é periódica de período T.

18. Se $f(x)$ é periódica de período T, prove que 3T também é período de f.

19. Sabendo que $f(x)$ é uma função par e periódica de período T = 4, complete o seu gráfico.



20. Se $f(x) = 2^x$, mostrar que

$$f(x+3) - f(x-1) = 15/2 f(x).$$

21. Seja $\phi(x) = 1/2\,(a^x + a^{-x})$ e $\psi(x) = 1/2\,(a^x - a^{-x})$.

Demostrar que

$$\phi(x+y) = \phi(x) \cdot \phi(y) + \psi(x) \cdot \psi(y) \text{ e}$$

$$\psi(x+y) = \phi(x) \cdot \psi(y) + \phi(y) \cdot \psi(x).$$

22. Construir o gráfico das seguintes funções exponenciais.

(*a*) $y = a^x$, se $a = 2, 1/2,$ e $(e = 2{,}718\ ...)$

(*b*) $y = 10^{1/x}$

(*c*) $y = e^{-x^2}$

(*d*) $y = -2^x$.

23. Dada $\phi(x) = \ln \dfrac{1-x}{1+x}$, verifique a igualdade $\phi(a) + \phi(b) = \phi\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$.

24. Sejam $f(x) = \log x$ e $g(x) = x^3$.

Forme as expressões

(*a*) $f[g(2)]$ (*b*) $f[g(a)],\ a > 0$

(*c*) $g[f(a)],\ a > 0.$

25. Construir o gráfico das seguintes funções logarítmicas.

(*a*) $y = \ln(-x)$ (*b*) $y = \ln |x|$

(*c*) $y = \ln(x + 1)$ (*d*) $y = \log_a x$ se $a = 10,\ 2$ e $1/2$

(*e*) $y = x \ln x.$

26. Se $f(x) = \text{arc tg}\ x$ prove que

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right).$$

27. Prove que $\text{arc tg}\ a - \text{arc tg}\ b = \text{arc cotg}\ b - \text{arc cotg}\ a$.

28. Seja $f(\theta) = \text{tg}\ \theta$. Verifique a igualdade $f(2\theta) = \dfrac{2f(\theta)}{1 - [f(\theta)]^2}$.

29. Seja $f(x) = \text{arc cos}\ (\log_{10} x)$.

Calcular $f(1/10), f(1)$ e $f(10)$.

30. Determinar o domínio das seguintes funções:

(*a*) $y = \text{arc cos}\ \dfrac{2x}{1 + x}$ (*b*) $y = \text{arc sen}\ (\log_{10} x/10)$

(*c*) $y = \sqrt{\text{sen}\ 2x}$.

31. Construir o gráfico das seguintes funções trigonométricas. Verificar se são periódicas e em caso afirmativo determinar o período.

(*a*) $y = \text{sen } kx, \quad k = 2, 3, 1/2 \text{ e } 1/3$

(*b*) $y = k \cos x, \quad k = 2, 3, 1/2, 1/3 \text{ e } -1$

(*c*) $y = k \cos 2x, \; k = 2, -1 \text{ e } 1/2$

(*d*) $y = \text{sen } (x - \pi/2)$

(*e*) $y = \cos (x + \pi/2)$

(*f*) $y = \text{tg } (x - 3\pi/2)$

(*g*) $y = \text{cotg } (x + \pi/4)$

(*h*) $y = \text{tg } \frac{1}{2} x$

(*i*) $y = 1 + \text{sen } x$

(*j*) $y = 1 + |\text{ sen } 2x\,|$

32. Dada a função $f(\text{x}) = 2 \text{ senh } x - 3 \text{ tgh } x$, calcule $f(2), f(-1)$ e $f(0)$.

33. Prove as identidades:

(*a*) $1 - \text{tgh}^2 u = \text{sech}^2 u$

(*b*) $1 - \text{cotgh}^2 u = -\text{cosech}^2 u$.

34. Defina uma função inversa para $y = \cosh x$, para $x \leq 0$. Esboce o gráfico.

35. Mostre a validade das expressões:

(*a*) $\text{arg cosh } x = \ln (x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1;$

(*b*) $\text{arg tgh } x = 1/2 \ln \left(\dfrac{1 + x}{1 - x} \right), \; -1 < x < 1;$

(*c*) $\text{arg sech } x = \ln \left(\dfrac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} \right), \; 0 < x \leq 1.$

36. Sendo $f(x) = \cosh x$, mostre que

$$f\,[\,\ln (x + \sqrt{x^2 - 1}\,)\,] = x$$

37. Mostre que as funções senh x, tgh x, cotgh x e cosech x são ímpares.

38. Mostre que as funções cosh x e sech x são pares.

MAKRON
Books

CAPÍTULO 3

EDITORA DA UFSC

LIMITE E CONTINUIDADE

O objetivo deste capítulo é dar uma definição de LIMITE de uma maneira intuitiva e também de uma maneira convencional. Vamos analisar propriedades e teoremas referentes a limites de funções. Finalmente, definiremos a continuidade das funções usando limites.

3.1 NOÇÃO INTUITIVA

Inicialmente faremos algumas considerações. Sabemos que, no conjunto dos números reais, podemos sempre escolher um conjunto de números segundo qualquer regra pré-estabelecida.

Analisemos os seguintes exemplos de sucessões numéricas.

(*1*) 1, 2, 3, 4, 5, ...

(*2*) 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, ...

(*3*) 1, 0, –1, –2, –3, ...

(*4*) 1, 3/2, 3, 5/4, 5, 7/6, 7, ...

Na sucessão (1), os termos tornam-se cada vez maiores sem atingir um LIMITE. Dado um número real qualquer, por maior que seja, podemos sempre encon-

trar na sucessão, um termo maior. Dizemos então que os termos dessa sucessão ***tendem para o infinito*** ou que o *limite da sucessão é infinito.*

Denota-se

$x \to +\infty$.

Na sucessão (2) os termos crescem mas não ilimitadamente. Os números aproximam-se cada vez mais do valor 1, sem nunca atingirem esse valor. Dizemos que

$x \to 1$.

De maneira análoga, dizemos que na sucessão (3)

$x \to -\infty$.

Em (4) os termos da sucessão oscilam sem tender para um limite.

Ampliaremos agora, o conceito de LIMITE para os diversos casos de *Limite de uma função.*

Observemos as seguintes funções:

Exemplo 1.

Seja $y = 1 - 1/x$ (ver Figura 3.1 e Tabela 3.1).

Tabela 3.1

x	1	2	3	4	5	6	...	500	...	1000	...
y	0	1/2	2/3	3/4	4/5	5/6	...	499/500	...	999/1000	...

x	−1	−2	−3	−4	−5	...	−100	...	−500	...
y	2	3/2	4/3	5/4	6/5	...	101/100	...	501/500	...

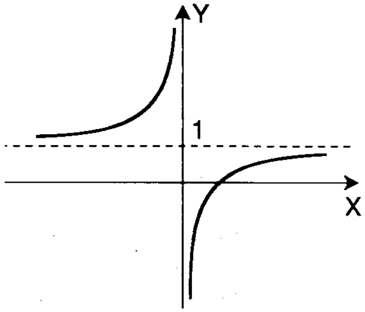


Figura 3-1

Esta função tende para 1 quando x tende para o infinito. Basta observar as tabelas e o gráfico para constatar que:

$y \to 1$ quando $x \to \pm\infty$.

Denota-se $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (1 - 1/x) = 1.$

Exemplo 2.

A função $y = x^2 + 3x - 2$ tende para $+\infty$ quando $x \to \pm\infty$.

Denota-se $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (x^2 + 3x - 2) = +\infty.$

De fato, intuitivamente, basta analisar o gráfico (Figura 3.2) e as sucessões da tabela (Tabela 3.2).

Tabela 3.2

x	1	2	3	4	5	6	7	...	100	...	1000	...
y	2	8	16	26	38	52	68	...	10298	...	1002998	...

x	– 1	– 2	– 3	– 4	– 5	– 6	...	– 100	...	– 500	...
y	– 4	– 4	– 2	2	8	16	...	9698	...	248498	...

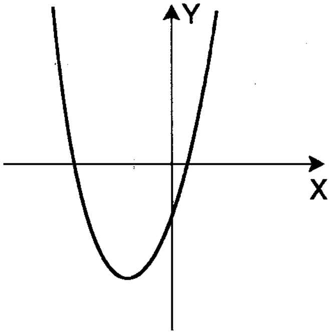


Figura 3-2

Exemplo 3.

A função $y = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$ tende para 2 quando $x \to \pm \infty$, e escrevemos

$$\lim_{x \to \pm \infty} \frac{2x + 1}{x - 1} = 2.$$

Tabela 3.3

x	3	2	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001	1,0001	...
y	3,5	5	8	14	32	302	3002	30002	...

x	− 1	0	0,9	0,99	0,999	0,9999	...
y	0,5	− 1	− 28	− 298	− 2998	− 29998	...

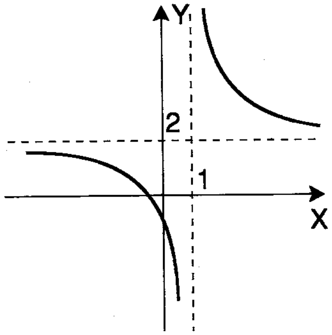


Figura 3-3

Observando a Figura 3.3 e a Tabela 3.3 ainda podemos dizer que $y \to +\infty$ quando $x \to 1$ através de valores maiores do que 1 e que $y \to -\infty$ quando $x \to 1$ através de valores menores do que 1. Neste caso, estamos nos referindo aos *limites laterais* denotados por:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x + 1}{x - 1} = +\infty \qquad \text{e}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2x + 1}{x - 1} = -\infty,$$

respectivamente chamados *limite à direita* e *limite à esquerda.*

Exemplo 4.

A Figura 3.4 nos mostra o gráfico da função

$$y = \frac{1}{(x + 1)^2}.$$

Esta função tende para o infinito quando x tende para -1, e escrevemos

$$\lim_{x \to -1} \frac{1}{(x + 1)^2} = +\infty$$

ou ainda,

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{(x+1)^2} = \lim_{x \to -1^-} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty .$$

Tabela 3.4

x	-3	-2	$-1,5$	$-1,25$	$-1,1$	$-1,01$	$-1,001$	...
y	0,25	1	4	16	100	10000	1000000	...

x	1	0	$-0,5$	$-0,75$	$-0,9$	$-0,99$	$-0,999$	...
y	0,25	1	4	16	100	10000	1000000	...

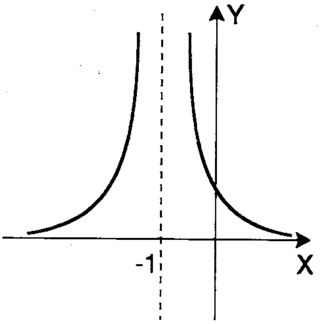


Figura 3-4

Exemplo 5.

A Figura 3.5 mostra o gráfico da função

$$y = \frac{-1}{(x-2)^2} .$$

Escrevemos $\lim_{x \to 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$ ou $y \to -\infty$ quando $x \to 2$.

Tabela 3.5

x	4	3	2,5	2,1	2,01	2,001	...
y	– 0,25	– 1	– 4	– 100	– 10000	– 1000000	...

x	0	1	1,5	1,9	1,99	1,999	...
y	– 0,25	– 1	– 4	– 100	– 10000	– 1000000	...

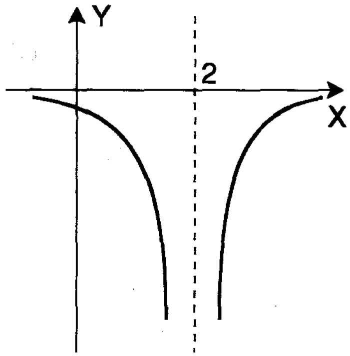


Figura 3-5

Exemplo 6.

Na Figura 3.6 temos o gráfico da função $y = 3x - 1$. De modo análogo aos exemplos anteriores, observando esse gráfico e a Tabela 3.6, podemos escrever que

$$\lim_{x \to 1^+} (3x - 1) = \lim_{x \to 1^-} (3x - 1) = 2,$$

ou ainda,

$$\lim_{x \to 1} (3x - 1) = 2.$$

Tabela 3.6

x	0	0,25	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999	0,9999	...
y	− 1	− 0,25	0,5	1,25	1,7	1,97	1,997	1,9997	...

x	2	1,75	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001	1,0001	...
y	5	4,25	3,5	2,75	2,3	2,03	2,003	2,0003	...

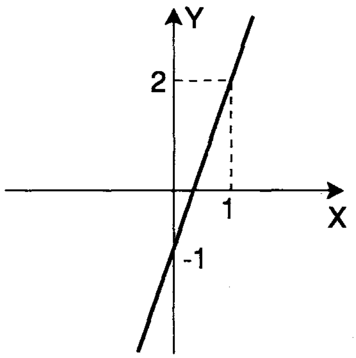


Figura 3-6

Podemos agora analisar os exemplos dados de outro modo.

No Exemplo 3.6, observa-se que é possível fazer o valor de y tão próximo de 2 quanto desejarmos, tornando x suficientemente próximo de 1, mas não necessariamente igual a 1. Ou ainda, o valor absoluto da diferença $y - 2$ tão pequeno quanto desejarmos, tornando o valor absoluto da diferença $x - 1$ suficientemente pequeno. (Observe a Tabela 3.6.)

Estamos agora aptos a formular as definições formais.

3.2 DEFINIÇÃO

Seja $f(x)$ definida num intervalo aberto I, contendo a, exceto possivelmente no próprio a. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x aproxima-se de a é L, e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

3.3 EXEMPLOS

Usando a definição 3.2 provar que:

(*i*) $\lim_{x \to 1} (3x - 1) = 2.$

De acordo com a definição 3.2 devemos mostrar que, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que

$|(3x - 1) - 2| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - 1| < \delta$.

O exame da desigualdade envolvendo ε proporciona uma chave para a escolha de δ.

As seguintes desigualdades são equivalentes:

$$|3x - 1 - 2| < \varepsilon$$

$$|3x - 3| < \varepsilon$$

$$|3(x - 1)| < \varepsilon$$

$$3|x - 1| < \varepsilon$$

$$|x - 1| < \varepsilon/3.$$

A última desigualdade nos sugere a escolha do δ.

Fazendo $\delta = \varepsilon/3$, vem que

$|(3x - 1) - 2| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - 1| < \delta$.

Portanto, $\lim_{x \to 1} (3x - 1) = 2.$

(*ii*) $\lim_{x \to 4} x^2 = 16.$

Vamos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$|x^2 - 16| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - 4| < \delta$.

Da desigualdade que envolve ε, temos

$$|x^2 - 16| < \varepsilon$$

$$|x - 4|\,|x + 4| < \varepsilon$$

Necessitamos agora substituir $|x + 4|$ por um valor constante. Neste caso, vamos supor

$$0 < \delta \leq 1,$$

e então, de $0 < |x - 4| < \delta$, seguem as seguintes desigualdades equivalentes:

$$|x - 4| < 1$$

$$-1 < x - 4 < 1$$

$$3 < x < 5$$

$$7 < x + 4 < 9$$

Portanto, $|x + 4| < 9$.

Escolhendo $\delta = \min(\varepsilon / 9, 1)$, temos que se $|x - 4| < \delta$

então

$$\begin{aligned} |x^2 - 16| = |x - 4|\,|x + 4| &< \delta \cdot 9 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{9} \cdot 9 \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo $\lim_{x \to 4} x^2 = 16.$

3.4 PROPOSIÇÃO (UNICIDADE DO LIMITE)

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.

Prova. Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$|f(x) - L_1| < \varepsilon/2$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_1$.

Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_2$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$|f(x) - L_2| < \varepsilon/2$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_2$.

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então, $|f(x) - L_1| < \varepsilon/2$ e $|f(x) - L_2| < \varepsilon/2$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Seja x tal que $0 < |x - a| < \delta$. Então, podemos escrever

$|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$

Como ε é arbitrário, temos $|L_1 - L_2| = 0$ e portanto $L_1 = L_2$.

3.5 PROPRIEDADES DOS LIMITES

Na Seção 3.3, usamos a definição de limite para provar que um dado número era limite de uma função. Foi um processo relativamente simples para funções lineares, que se tornou complicado para funções mais elaboradas. A seguir introduziremos propriedades que podem ser usadas para achar muitos limites sem apelar para a pesquisa do número δ que aparece na definição 3.2.

3.5.1 Proposição. Se a, m e n são números reais, então

$$\lim_{x \to a} (mx + n) = ma + n.$$

Prova. ***Caso 1:* $m \neq 0$.** De acordo com a definição 3.2, dado $\varepsilon > 0$, devemos mostrar que existe $\delta > 0$, tal que

$$|(m\,x + n) - (m\,a + n)| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta.$$

Podemos obter a chave para a escolha de δ examinando a desigualdade que envolve ε. As seguintes desigualdades são equivalentes:

$$\begin{aligned} |(m\,x + n) - (m\,a + n)| &< \varepsilon \\ |m\,x - m\,a| &< \varepsilon \\ |m|\,|x - a| &< \varepsilon \\ |x - a| &< \frac{\varepsilon}{|m|}. \end{aligned}$$

A última desigualdade sugere a escolha $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|m|}$.

De fato, se $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|m|}$, temos

$$|(m\,x + n) - (m\,a + n)| = |m|\,|x - a| < |m| \cdot \frac{\varepsilon}{|m|} \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta,$$

e portanto,

$$\lim_{x \to a} (mx + n) = ma + n.$$

***Caso 2:* $m = 0$.** Se $m = 0$, então $|(m\,x + n) - (m\,a + n)| = 0$ para todos os valores de x. Logo, tomando qualquer $\delta > 0$, a definição de limite é satisfeita.

Portanto, $\lim\limits_{x \to a} (mx + n) = ma + n$, para quaisquer a, m e n reais.

Da proposição 3.5.1, decorre que:

(a) Se c é um número real qualquer, então

$$\lim_{x \to a} c = c.$$

(*b*) $\lim_{x \to a} x = a.$

3.5.2 Proposição. Se $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$ existem, e c é um número real qualquer, então:

(*a*) $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x);$

(*b*) $\lim_{x \to a} cf(x) = c \cdot \lim_{x \to a} f(x);$

(*c*) $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x);$

(*d*) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, desde que $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0;$

(*e*) $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n$ para qualquer inteiro positivo n;

(*f*) $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$, se $\lim_{x \to a} f(x) > 0$ e n inteiro ou se $\lim_{x \to a} f(x) \leq 0$ e n é um inteiro positivo ímpar;

(*g*) $\lim_{x \to a} \ln [f(x)] = \ln [\lim_{x \to a} f(x)]$, se $\lim_{x \to a} f(x) > 0;$

(*h*) $\lim_{x \to a} \cos [f(x)] = \cos [\lim_{x \to a} f(x)];$

(*i*) $\lim_{x \to a} \operatorname{sen} [f(x)] = \operatorname{sen} [\lim_{x \to a} f(x)];$

(*j*) $\lim_{x \to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \to a} f(x)}.$

Provaremos o item (a) desta proposição usando o sinal positivo.

Prova do item (a).

Sejam $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$ e $\varepsilon > 0$ arbitrário. Devemos provar que existe $\delta > 0$ tal que

$$|(f(x) + g(x)) - (L + M)| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta.$$

Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\varepsilon/2 > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon/2$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_1$

Como $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $|g(x) - M| < \varepsilon/2$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_2$.

Seja δ o menor dos números δ_1 e δ_2.

Então $\delta \leq \delta_1$ e $\delta \leq \delta_2$ e assim, se $0 < |x - a| < \delta$, temos

$|g(x) - M| < \varepsilon/2$ e $|f(x) - L| < \varepsilon/2$.

Logo,

$$\begin{aligned} |(f(x) + g(x)) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

sempre que $0 < |x - a| < \delta$ e desta forma $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M$.

3.5.3 Proposição. Se $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo x em um intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em $x = a$, e se

$$\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} g(x)$$

então,

$$\lim_{x \to a} h(x) = L.$$

Prova. Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como $\lim_{x \to a} f(x) = L$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_1$. Como $\lim_{x \to a} g(x) = L$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $|g(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_2$.

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Então, se $0 < |x - a| < \delta$ temos que $|f(x) - L| < \varepsilon$ e $|g(x) - L| < \varepsilon$, ou de forma equivalente, $L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$ e $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$.

Assim, usando a hipótese, concluímos que se $0 < |x - a| < \delta$, então,

$$L - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < L + \varepsilon,$$

isto é,

$$L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon.$$

Logo, se $0 < |x - a| < \delta$, temos que $|h(x) - L| < \varepsilon$ e, portanto, $\lim_{x \to a} h(x) = L$.

3.5.4 Exemplos.

(*i*) Encontrar $\lim_{x \to 2} (x^2 + 3x + 5)$.

Temos,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 2} (x^2 + 3x + 5) &= \lim_{x \to 2} x^2 + \lim_{x \to 2} 3x + \lim_{x \to 2} 5 \\
&= \lim_{x \to 2} x^2 + 3 \lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 5 \\
&= 2^2 + 3 \cdot 2 + 5 \\
&= 15.
\end{aligned}$$

(*ii*) Encontrar $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 5}{x^3 - 7}$.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x - 5}{x^3 - 7} = \frac{\lim\limits_{x \to 3} (x - 5)}{\lim\limits_{x \to 3} (x^3 - 7)} = \frac{3 - 5}{27 - 7} = \frac{-1}{10}.$$

(*iii*) Encontrar $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{x^4 - 4x + 1}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2} \sqrt{x^4 - 4x + 1} &= \sqrt{\lim_{x \to -2} (x^4 - 4x + 1)} \\ &= \sqrt{(-2)^4 - 4(-2) + 1} \\ &= 5. \end{aligned}$$

(*iv*) Encontrar $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Neste caso, não podemos aplicar a propriedade do quociente pois $\lim\limits_{\to 1} (x - 1) = 0$.

Porém, se fatoramos o numerador obtemos

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1 \quad \text{para} \quad x \neq 1.$$

Como no processo de limite os valores de x considerados são próximos de 1, ıas diferentes de 1, temos

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2.$$

(*v*) Encontrar $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \left| \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} \right|$.

Vamos usar a proposição 3.5.3. Como todos os valores da função seno estão tre -1 e 1, temos

$$0 \leq \left|\text{sen}\ \frac{1}{x}\right| \leq 1, \ \forall \ x \neq 0.$$

Multiplicando a desigualdade por x^2, temos

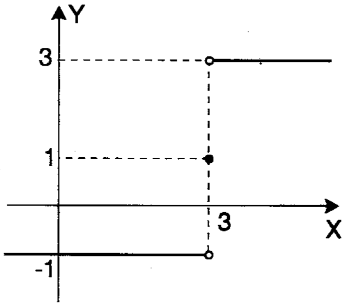
$$0 \leq x^2 \left|\text{sen}\ \frac{1}{x}\right| \leq x^2, \forall \ x \neq 0.$$

Como $\lim\limits_{x \to 0} 0 = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$, pela proposição 3.5.3 concluímos que

$$\lim_{x \to 0} x^2 \left|\text{sen}\ \frac{1}{x}\right| = 0.$$

3.6 EXERCÍCIOS

1. Seja $f(x)$ a função definida pelo gráfico:

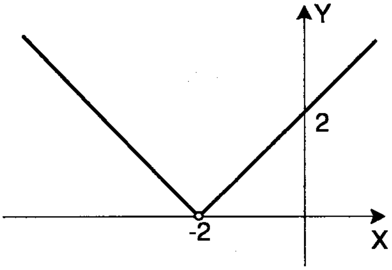


Intuitivamente, encontre se existir:

(*a*) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$. (*b*) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$. (*c*) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

(*d*) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. (*e*) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. (*f*) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$.

2. Seja $f(x)$ a função definida pelo gráfico:



Intuitivamente, encontre se existir:

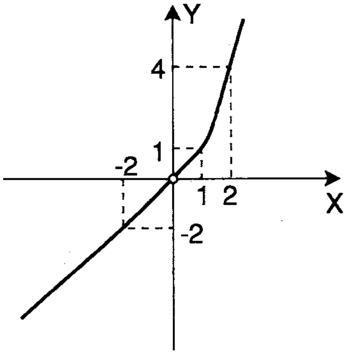
(a) $\lim_{x \to -2^+} f(x)$.

(b) $\lim_{x \to -2^-} f(x)$.

(c) $\lim_{x \to -2} f(x)$.

(d) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

3. Seja $f(x)$ a função definida pelo gráfico:



Intuitivamente, encontre se existir:

(a) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

(b) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$.

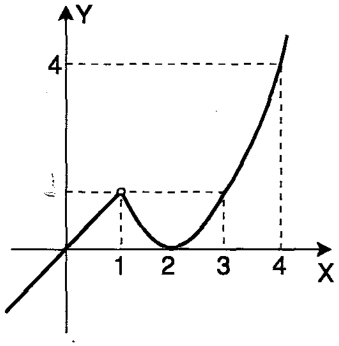
(c) $\lim_{x \to 0} f(x)$.

(d) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

(e) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

(f) $\lim_{x \to 2} f(x)$.

4. Seja $f(x)$ a função definida pelo gráfico:



Intuitivamente, encontre se existir:

(*a*) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$.

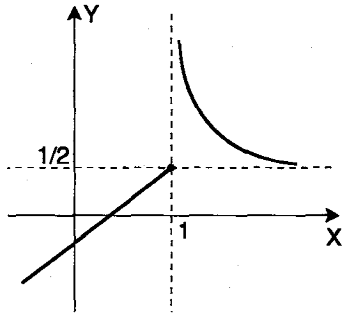
(*b*) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$.

(*c*) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

(*d*) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

(*e*) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

5. Seja $f(x)$ a função definida pelo gráfico:



Intuitivamente, encontre se existir:

(*a*) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.

(*b*) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$.

(*c*) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

(*d*) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

(*e*) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

6. Mostrar que existe o limite de $f(x) = 4x - 5$ em $x = 3$ e que é igual a 7.

7. Mostrar que $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = 9$.

Nos exercícios 8 a 12 é dado $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$. Determinar um número δ para o ε dado tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

8. $\lim\limits_{x \to 2} (2x + 4) = 8$, $\varepsilon = 0{,}01$.

9. $\lim\limits_{x \to -1} (-3x + 7) = 10$, $\varepsilon = 0{,}5$.

10. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} = -4$, $\varepsilon = 0{,}1$.

11. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{1}{2 - x} = \dfrac{-1}{3}$, $\varepsilon = 0{,}25$.

12. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$, $\varepsilon = 0{,}75$.

13. Demonstrar que $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{sen} 1/x = 0$.

14. Mostrar que:

(*i*) Se f é uma função polinomial, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ para todo real a.

(*ii*) Se g é uma função racional e a pertence ao domínio de g então

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

Calcular os limites nos exercícios 15 a 34, usando as propriedades de Limites.

15. $\lim\limits_{x \to 0} (3 - 7x - 5x^2)$.

16. $\lim\limits_{x \to 3} (3x^2 - 7x + 2)$.

17. $\lim\limits_{x \to -1} (-x^5 + 6x^4 + 2).$

18. $\lim\limits_{x \to 1/2} (2x + 7).$

19. $\lim\limits_{x \to -1} [(x + 4)^3 \cdot (x + 2)^{-1}].$

20. $\lim\limits_{x \to 0} [(x - 2)^{10} \cdot (x + 4)].$

21. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x + 4}{3x - 1}.$

22. $\lim\limits_{t \to 2} \dfrac{t + 3}{t + 2}.$

23. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}.$

24. $\lim\limits_{t \to 2} \dfrac{t^2 + 5t + 6}{t + 2}.$

25. $\lim\limits_{t \to 2} \dfrac{t^2 - 5t + 6}{t - 2}.$

26. $\lim\limits_{s \to 1/2} \dfrac{s + 4}{2s}.$

27. $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt[3]{2x + 3}.$

28. $\lim\limits_{x \to 7} (3x + 2)^{2/3}.$

29. $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \dfrac{2x^2 - x}{3x}.$

30. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x\sqrt{x} - \sqrt{2}}{3x - 4}.$

31. $\lim\limits_{x \to \pi/2} [2 \operatorname{sen} x - \cos x + \operatorname{cotg} x].$

32. $\lim\limits_{x \to 4} (e^x + 4x).$

33. $\lim\limits_{x \to -1/3} (2x + 3)^{1/4}.$

34. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\operatorname{senh} x}{4}.$

3.7 LIMITES LATERAIS

3.7.1 Definição. Seja f uma função definida em um intervalo aberto (a, c). Dizemos que um número L é o *limite à direita* da função f quando x tende para a, e escrevemos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L,$$

se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $a < x < a + \delta$.

Se $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$, dizemos que $f(x)$ tende a L quando x tende para a *pela direita*. Usamos o símbolo $x \to a^+$ para indicar que os valores de x são sempre maiores do que a.

De maneira análoga, definimos limite à esquerda.

3.7.2 Definição. Seja f uma função definida em um intervalo aberto (d, a). Dizemos que um número L é o *limite à esquerda* da função f, quando x tende para a, e escrevemos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L,$$

se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $a - \delta < x < a$.

Neste caso, o símbolo $x \to a^-$ indica que os valores de x considerados são sempre menores do que a.

Observação. As propriedades de limites, vistas nas proposições 3.5.1, 3.5.2 e 3.5.3 continuam válidas se substituirmos $x \to a$ por $x \to a^+$ ou $x \to a^-$.

3.7.3 Exemplos

(*i*) Dada a função $f(x) = (1 + \sqrt{x - 3})$, determinar, se possível,

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) \text{ e } \lim_{x \to 3^-} f(x).$$

A função dada só é definida para $x \geq 3$. Assim, não existe $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$.

Para calcular $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$, podemos aplicar as propriedades. Temos,

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (1 + \sqrt{x - 3})$$

INSTITUTO DE MATEMÁTICA 16060 BIBLIOTECA

$$= \lim_{x \to 3^+} 1 + \lim_{x \to 3^+} \sqrt{x - 3}$$

$$= 1 + \sqrt{\lim_{x \to 3^+} (x - 3)}$$

$$= 1 + 0$$

$$= 1.$$

• (*ii*) Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-|x|}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0. \end{cases}$

Determinar $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x)$. Esboçar o gráfico.

Se $x > 0$, então $|x| = x$ e $f(x) = \dfrac{-x}{x} = -1$.

Logo, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} -1 = -1$.

Se $x < 0$, então $|x| = -x$ *e* $f(x) = \dfrac{x}{-x} = 1$.

Portanto, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 1 = 1$.

O gráfico da função pode ser visto na Figura 3.7. Observamos que

$\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x)$.

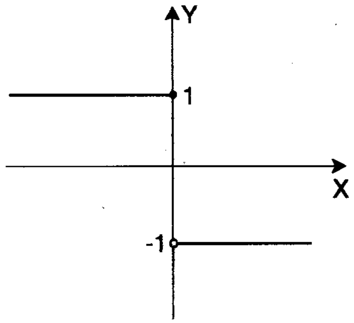


Figura 3-7

(*iii*) Seja $f(x) = |x|$. Determinar $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x)$. Esboçar o gráfico.

Se $x \geq 0$, então $f(x) = x$. Logo, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0$.

Se $x < 0$, então $f(x) = -x$. Logo, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$.

A Figura 3.8, mostra o esboço do gráfico da função. Neste exemplo, podemos observar que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x).$$

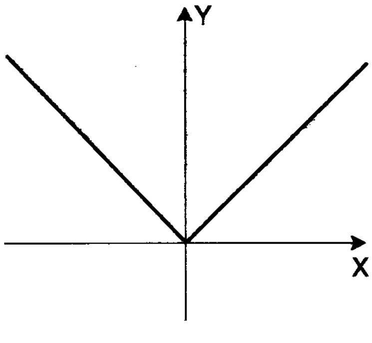


Figura 3-8

O teorema a seguir nos dá a relação existente entre *limites laterais* e *limite* de uma função.

3.7.4 Teorema. Se f é definida em um intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no ponto a, então $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se e somente se $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$.

Prova. Provaremos apenas a condição suficiente. A condição necessária é conseqüência imediata das definições dos limites envolvidos.

Suponhamos que $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$. Então, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $a < x < a + \delta_1$ e existe $\delta_2 > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $a - \delta_2 < x < a$.

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então $a - \delta_2 \le a - \delta$ e $a + \delta \le a + \delta_1$, e, portanto, se $x \ne a$ e $a - \delta < x < a + \delta$, temos que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

De forma equivalente, $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$ e desta forma,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

3.7.5 Exemplos

(*i*) Analisando os exemplos anteriores, podemos concluir que:

(*a*) Também não existe $\lim_{x \to 0} -\dfrac{|x|}{x}$.

(*b*) $\lim_{x \to 0} |x| = 0.$

(*ii*) Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{para} \quad x < 2 \\ 2 \quad , & \text{para} \quad x = 2 \\ 9 - x^2, & \text{para} \quad x > 2. \end{cases}$

Determinar, se existirem, $\lim_{x \to 2^+} f(x)$, $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 2} f(x)$. Esboçar o gráfico da função.

Se $x > 2$, então, $f(x) = 9 - x^2$.

Assim,

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (9 - x^2) = \lim_{x \to 2^+} 9 - \lim_{x \to 2^+} x^2 = 9 - 4 = 5.$$

Se $x < 2$, então, $f(x) = x^2 + 1$.

Portanto,

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 + 1) = \lim_{x \to 2^-} x^2 + \lim_{x \to 2^-} 1 = 4 + 1 = 5.$$

Como $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = 5$, concluímos que

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5.$$

A Figura 3.9, mostra o gráfico de $f(x)$.

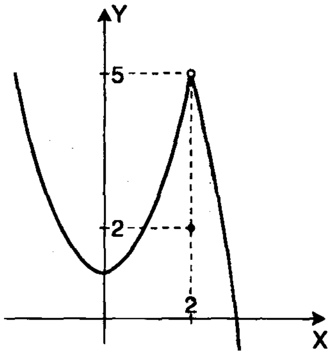


Figura 3-9

3.8 EXERCÍCIOS

1. Seja $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq 3 \\ 3x - 7, & x > 3. \end{cases}$

Calcule:

(a) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$. (b) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$. (c) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

(d) $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$. (e) $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$. (f) $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$.

Esboçar o gráfico de $f(x)$.

2. Seja $h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & x \neq 3 \\ 7, & x = 3. \end{cases}$

Calcule $\lim\limits_{x \to 3} h(x)$. Esboce o gráfico de $h(x)$.

3. Seja $F(x) = |x - 4|$. Calcule os limites indicados se existirem:

(*a*) $\lim\limits_{x \to 4^+} F(x)$. (*b*) $\lim\limits_{x \to 4^-} F(x)$. (*c*) $\lim\limits_{x \to 4} F(x)$.

Esboce o gráfico de $F(x)$.

4. Seja $f(x) = 2 + |5x - 1|$. Calcule se existir:

(*a*) $\lim\limits_{x \to 1/5^+} f(x)$. (*b*) $\lim\limits_{x \to 1/5^-} f(x)$. (*c*) $\lim\limits_{x \to 1/5} f(x)$.

Esboce o gráfico de $f(x)$.

5. Seja $g(x) = \begin{cases} \dfrac{|x - 3|}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 0, & x = 3. \end{cases}$

(*a*) Esboce o gráfico de $g(x)$.

(*b*) Achar, se existirem $\lim\limits_{x \to 3^+} g(x)$, $\lim\limits_{x \to 3^-} g(x)$ e $\lim\limits_{x \to 3} g(x)$.

6. Seja $h(x) = \begin{cases} x/|x|, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$

Mostrar que $h(x)$ não tem limite no ponto 0.

7. Determinar os limites à direita e à esquerda da função $f(x) = \text{arc tg } 1/x$ quando $x \to 0$.

8. Verifique se $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x - 1}$ existe.

9. Seja $f(x) = \begin{cases} 1/x & , \quad x < 0 \\ x^2 & , \quad 0 \le x < 1 \\ 2 & , \quad x = 1 \\ 2 - x & , \quad x > 1 \, . \end{cases}$

Esboce o gráfico e calcule os limites indicados se existirem:

(*a*) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$. (*b*) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$. (*c*) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

(*d*) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$. (*e*) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. (*f*) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$.

(*g*) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$. (*h*) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

10. Seja $f(x) = (x^2 - 25)/(x - 5)$.

Calcule os limites indicados se existirem:

(*a*) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. (*b*) $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$. (*c*) $\lim\limits_{x \to -5^-} f(x)$.

(*d*) $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$. (*e*) $\lim\limits_{x \to -5} f(x)$.

3.9 CÁLCULO DE LIMITES

Antes de apresentar exemplos de cálculo de limites, vamos falar um pouco sobre *expressões indeterminadas*. Costuma-se dizer que as expressões:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \times \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

são indeterminadas. O que significa isto?

Vejamos, por exemplo, $\frac{0}{0}$.

Sejam f e g funções tais $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$. Nada se pode afirmar, *a priori*, sobre o limite do quociente f/g. Dependendo das funções f e g ele pode assumir qualquer valor real ou não existir. Exprimimos isso, dizendo que 0/0 é um símbolo de indeterminação.

Para comprovar o que dissemos acima, vejamos dois exemplos:

(*i*) Sejam $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^2$.

Temos, $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0$

e $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to 0} x = 0.$

(*ii*) Sejam $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x^2$.

Temos, $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0$ e, neste caso,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Analisaremos, agora, alguns exemplos de cálculo de limites onde os artifícios algébricos são necessários. São os casos de funções racionais em que o limite do denominador é zero num determinado ponto e o limite do numerador também é zero neste mesmo ponto.

Simbolicamente estaremos diante da indeterminação do tipo 0/0.

Exemplo 1. $\lim_{x \to -2} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4}$.

Neste caso, fatora-se o numerador e o denominador fazendo-se a seguir as simplificações possíveis. Aplicamos então a proposição 3.5.2.

Temos,

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to -2} \frac{(x^2 - 2x + 1)(x + 2)}{(x - 2)(x + 2)}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -2} (x^2 - 2x + 1)}{\lim\limits_{x \to -2} (x - 2)}$$

$$= -9/4.$$

Exemplo 2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$.

Para este exemplo usaremos o artifício da racionalização do numerador da função.

Segue então,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})}{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{2})^2}{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x + 2 - 2}{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Exemplo 3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

Neste caso faremos uma troca de variáveis para facilitar os cálculos.

Por exemplo, $x = t^6$, $t \geq 0$.

Quando $t^6 \to 1$, temos que $t \to 1$.

Portanto,

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{t \to 1} \frac{\sqrt[3]{t^6} - 1}{\sqrt{t^6} - 1}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{t^2 - 1}{t^3 - 1}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{(t-1)(t+1)}{(t-1)(t^2+t+1)}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{t+1}{t^2+t+1}$$

$$= 2/3.$$

Exemplo 4. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^2 - x^2}{h}$.

Neste exemplo, simplesmente desenvolve-se o numerador para poder realizar as simplificações.

Obtem-se:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x + h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x + h)$$

$$= 2x.$$

3.10 EXERCÍCIOS

1. Para cada uma das seguintes funções ache

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}.$$

(*a*) $f(x) = 3x^2$. (*b*) $f(x) = 1/x,\ x \neq 0$. (*c*) $f(x) = 2/3\, x^2$.

(*d*) $f(x) = 3x^2 + 5x - 1$. (*e*) $f(x) = \dfrac{1}{x + 1},\ x \neq -1$. (*f*) $f(x) = x^3$.

Nos exercícios 2 a 25 calcule os limites.

2. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$.

3. $\lim_{t \to -2} \dfrac{t^3 + 4t^2 + 4t}{(t + 2)(t - 3)}$.

4. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2}$.

5. $\lim_{t \to 5/2} \dfrac{2t^2 - 3t - 5}{2t - 5}$.

6. $\lim_{x \to a} \dfrac{x^2 + (1 - a)x - a}{x - a}$.

7. $\lim_{x \to 4} \dfrac{3x^2 - 17x + 20}{4x^2 - 25x + 36}$.

8. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 6x + 5}{x^2 - 3x - 4}$.

9. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$.

10. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.

11. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$.

12. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(2 + h)^4 - 16}{h}$.

13. $\lim_{t \to 0} \dfrac{(4 + t)^2 - 16}{t}$.

14. $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{25 + 3t} - 5}{t}$.

15. $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{a^2 + bt} - a}{t}$, $a > 0$.

16. $\lim_{h \to 1} \dfrac{\sqrt{h} - 1}{h - 1}$.

17. $\lim_{h \to -4} \dfrac{\sqrt{2(h^2 - 8)} + h}{h + 4}$.

18. $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8 + h} - 2}{h}$.

19. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1}{-x}$.

20. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2 + a^2} - a}{\sqrt{x^2 + b^2} - b}$, $a, b > 0$.

21. $\lim_{x \to a} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{x - a}$, $a \neq 0$.

22. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$.

23. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x - 1)^2}$.

24. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{3 - \sqrt{5 + x}}{1 - \sqrt{5 - x}}$.

25. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}$.

3.11 Limites no Infinito

No exemplo 1 da seção 3.1, analisamos o comportamento da função $f(x) = 1 - 1/x$ para valores de x muito grandes.

Intuitivamente, vimos que podemos tornar o valor de $f(x)$ tão próximo de 1 quanto desejarmos, tomando para x valores suficientemente elevados. (Observar a Tabela 3.1.) Da mesma forma, fazendo x decrescer ilimitadamente vemos que $f(x)$ se aproxima desse mesmo valor 1.

Temos as seguintes definições:

3.11.1 Definição. Seja f uma função definida em um intervalo aberto $(a, +\infty)$. Escrevemos,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L,$$

quando o número L satisfaz à seguinte condição:

Para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x > A$.

3.11.2 Definição. Seja f definida em $(-\infty, b)$. Escrevemos,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L,$$

se L satisfaz a seguinte condição:

Para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $B < 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x < B$.

Observação. As propriedades dos limites dadas na proposição 3.5.2 da seção 3.5, permanecem inalteradas quando substituimos $x \to a$ por $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.

Temos ainda o seguinte teorema, que nos ajudará muito no cálculo dos limites no infinito.

3.11.3 Teorema. Se n é um número inteiro positivo, então:

(*i*) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0.$

(*ii*) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0.$

Prova. Vamos demonstrar o item (*i*). Devemos provar que, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $A > 0$, tal que

$$\left| \frac{1}{x^n} - 0 \right| < \varepsilon \text{ sempre que } x > A.$$

O exame da desigualdade que envolve ε nos sugere a escolha de A.

As seguintes desigualdades são equivalentes:

$$\left| \frac{1}{x^n} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{|x|^n} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{|x|^n}} < \sqrt[n]{\varepsilon}$$

$$\frac{1}{|x|} < \sqrt[n]{\varepsilon}$$

$$|x| > 1 / \sqrt[n]{\varepsilon}.$$

A última desigualdade nos sugere fazer $A = 1/\sqrt[n]{\varepsilon}$.

Temos que $x > A \Rightarrow \left| \dfrac{1}{x^n} - 0 \right| < \varepsilon$ e desta forma

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

A demonstração do item (*ii*) se faz de forma análoga. Sugerimos ao aluno que tente fazê-la.

3.11.4 Exemplos

(*i*) Determinar $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 5}{x + 8}$.

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Vamos dividir o numerador e o denominador por x e depois aplicar as propriedades de limites juntamente com o teorema 3.11.3.

Temos,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 5}{x + 8} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 - 5/x}{1 + 8/x}$$

$$= \frac{\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (2 - 5/x)}{\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (1 + 8/x)}$$

$$= \frac{\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 2 - \lim_{x \to +\infty} 5/x}{\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 1 + \lim_{x \to +\infty} 8/x}$$

$$= \frac{2 - 5.0}{1 + 8.0}$$

$$= 2.$$

(*ii*) Encontrar $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3 - 3x + 5}{4x^5 - 2}$.

Novamente temos uma indeterminação do tipo ∞/∞.

Para usarmos o teorema 3.11.3, dividimos o numerador e o denominador pela maior potência de x, que neste caso é x^5.

Temos,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3 - 3x + 5}{4x^5 - 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{x^4} + \dfrac{5}{x^5}}{4 - 2/x^5}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -\infty} (2/x^2 - 3/x^4 + 5/x^5)}{\lim\limits_{x \to -\infty} (4 - 2/x^5)}$$

$$= \frac{2 \lim\limits_{x \to -\infty} 1/x^2 - 3 \lim\limits_{x \to -\infty} 1/x^4 + 5 \lim\limits_{x \to -\infty} 1/x^5}{\lim\limits_{x \to -\infty} 4 - 2 \lim\limits_{x \to -\infty} 1/x^5}$$

$$= \frac{2.0 - 3.0 + 5.0}{4 - 2.0}$$

$$= 0.$$

(*iii*) Determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x + 5}{\sqrt{2x^2 - 5}}$.

Neste caso, dividimos o numerador e o denominador por x. No denominador tomamos $x = \sqrt{x^2}$, já que os valores de x podem ser considerados positivos ($x \to +\infty$). Temos,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x + 5}{\sqrt{2x^2 - 5}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 + 5/x}{\sqrt{2x^2 - 5} \,/\, \sqrt{x^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} (2 + 5/x)}{\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{2x^2 - 5}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} 2 + 5 \lim\limits_{x \to +\infty} 1/x}{\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2 - 5/x^2}}$$

$$= \frac{2 + 5.0}{\sqrt{\lim\limits_{x \to +\infty} (2 - 5/x^2)}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2 - 5.0}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,.$$

(*iv*) Determinar $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x + 5}{\sqrt{2x^2 - 5}}$.

Como no exemplo (*iii*), dividimos numerador e denominador por x. Como neste caso $x \to -\infty$, os valores de x podem ser considerados negativos. Então, para o denominador, tomamos $x = -\sqrt{x^2}$. Temos,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x + 5}{\sqrt{2x^2 - 5}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2 + 5/x}{\sqrt{2x^2 - 5} \,/\, (-\sqrt{x^2}\,)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2 + 5/x}{-\sqrt{\dfrac{2x^2 - 5}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -\infty} (2 + 5/x)}{-\sqrt{\lim\limits_{x \to -\infty} (2 - 5/x^2)}}$$

$$= \frac{2 + 5.0}{-\sqrt{2 - 5.0}}$$

$$= \frac{2}{-\sqrt{2}}$$

$$= -\sqrt{2}.$$

3.12 LIMITES INFINITOS

No exemplo 4 da seção 3.1, analisamos o comportamento da função $f(x) = 1/(x + 1)^2$ quando x está próximo de -1. Intuitivamente, olhando a Tabela 3.4, vemos que quando x se aproxima cada vez mais de -1, $f(x)$ cresce ilimitadamente. Em outras palavras, podemos tornar $f(x)$ tão grande quanto desejarmos, tomando para x valores bastante próximos de -1.

Temos a seguinte definição.

3.12.1 Definição. Seja $f(x)$ uma função definida em um intervalo aberto contendo a, exceto, possivelmente, em $x = a$. Dizemos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty,$$

se para qualquer $A > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $f(x) > A$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

De modo semelhante, observando a Figura 3.5, do exemplo 5 da seção 3.1, podemos ver o que ocorre com uma função $f(x)$ cujos valores decrescem ilimitadamente nas proximidades de um ponto a.

3.12.2 Definição. Seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto contendo a, exceto, possivelmente, em $x = a$. Dizemos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty,$$

se para qualquer $B < 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $f(x) < B$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Além dos limites infinitos definidos em 3.12.1 e 3.12.2, podemos considerar ainda os limites laterais infinitos e os limites infinitos no infinito. Existem definições formais para cada um dos seguintes limites:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty\ , \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty\ , \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty\ ,$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty\ , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\ , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty\ ,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Por exemplo, dizemos que $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ se para qualquer $A > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $f(x) > A$ sempre que $0 < x < a + \delta$.

A seguir apresentamos um teorema muito usado no cálculo de limites infinitos.

3.12.3 Teorema. Se n é um número inteiro positivo qualquer, então:

(*i*) $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty.$

$$(ii) \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } n \text{ é par} \\ -\infty, & \text{se } n \text{ é impar}. \end{cases}$$

Prova. Vamos provar o item (i). Devemos mostrar que para qualquer $A > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\frac{1}{x^n} > A \quad \text{sempre que} \quad 0 < x < \delta.$$

Trabalhando com a desigualdade que envolve A, obtemos uma pista para a escolha de δ. Como $x > 0$, as desigualdades abaixo são equivalentes:

$$\frac{1}{x^n} > A$$

$$x^n < \frac{1}{A}$$

$$x < \sqrt[n]{1/A}.$$

Assim, escolhendo $\delta = \sqrt[n]{1/A}$, temos $1/x^n > A$ sempre que $0 < x < \delta$.

3.12.4 Propriedades dos Limites Infinitos.

De certo modo, a proposição 3.5.2 permanece válida para limites infinitos, embora devamos tomar muito cuidado quando combinamos funções envolvendo esses limites. A Tabela 3.7 nos dá um *resumo* dos fatos principais válidos para os limites infinitos, onde podemos ter $x \to a$, $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$. As demonstrações não são difíceis. Provaremos o item 01 como exemplo.

Na Tabela 3.7, 0^+ indica que o limite é zero e a função se aproxima de zero por valores positivos e 0^- indica que o limite é zero e a função se aproxima de zero por valores negativos.

Tabela 3.7

	$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$h(x) =$	$\lim h(x)$	simbolicamente
01	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$f(x) + g(x)$	$\pm\infty$	$\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$
02	$+\infty$	$+\infty$	$f(x) - g(x)$	?	$(+\infty) - (+\infty)$ é indeterminação
03	$+\infty$	k	$f(x) + g(x)$	$+\infty$	$+\infty + k = +\infty$
04	$-\infty$	k	$f(x) + g(x)$	$-\infty$	$-\infty + k = -\infty$
05	$+\infty$	$+\infty$	$f(x) \cdot g(x)$	$+\infty$	$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
06	$+\infty$	$-\infty$	$f(x) \cdot g(x)$	$-\infty$	$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$
07	$+\infty$	$k > 0$	$f(x) \cdot g(x)$	$+\infty$	$+\infty \cdot k = +\infty,\ k > 0$
08	$+\infty$	$k < 0$	$f(x) \cdot g(x)$	$-\infty$	$+\infty \cdot k = -\infty,\ k < 0$
09	$\pm\infty$	0	$f(x) \cdot g(x)$	?	$\pm\infty \cdot 0$ é indeterminação
10	k	$\pm\infty$	$f(x)/g(x)$	0	$k/\pm\infty = 0$
11	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$f(x)/g(x)$	?	$\pm\infty/\pm\infty$ é indeterminação
12	$k > 0$	0^+	$f(x)/g(x)$	$+\infty$	$k/0^+ = +\infty,\ k > 0$
13	$+\infty$	0^+	$f(x)/g(x)$	$+\infty$	$+\infty/0^+ = +\infty$
14	$k > 0$	0^-	$f(x)/g(x)$	$-\infty$	$k/0^- = -\infty,\ k > 0$
15	$+\infty$	0^-	$f(x)/g(x)$	$-\infty$	$+\infty/0^- = -\infty$
16	0	0	$f(x)/g(x)$	?	$0/0$ é indeterminação

Prova do item 01. Sejam f e g tais que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$ e $h(x) = f(x) + g(x)$. Vamos provar que $\lim\limits_{x \to a} h(x) = +\infty$.

Devemos mostrar que dado $A > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $h(x) > A$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Seja $A > 0$ qualquer. Como $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, $\exists\ \delta_1 > 0$ tal que $f(x) > A/2$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_1$. Como $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $g(x) > A/2$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_2$.

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Temos, então

$h(x) = f(x) + g(x) > A/2 + A/2 = A$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$ e desta forma

$\lim_{x \to a} h(x) = +\infty$.

3.12.5 Exemplos

(*i*) Determinar $\lim_{x \to 0} (x^3 + \sqrt{x} + 1/x^2)$.

Temos,

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} (x^3 + \sqrt{x} + 1/x^2) &= \lim_{x \to 0} x^3 + \lim_{x \to 0} \sqrt{x} + \lim_{x \to 0} 1/x^2 \\ &= 0 + 0 + \infty \\ &= +\infty.\end{aligned}$$

(*ii*) Determinar $\lim_{x \to +\infty} (3x^5 - 4x^3 + 1)$.

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$. Para determinar o limite usamos um artifício de cálculo. Escrevemos,

$$\lim_{x \to +\infty} (3x^5 - 4x^3 + 1) = \lim_{x \to +\infty} x^5 \left(3 - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^5}\right)$$

$$= +\infty\,(3 - 0 + 0)$$

$$= +\infty.$$

(*iii*) Determinar $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x^2}$ e $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x^2}$.

Para $x > 0$, temos $|x| = x$. Assim,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Para $x < 0$, temos $|x| = -x$. Portanto,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{x} = +\infty\,.$$

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x^2} = +\infty$, concluímos que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x^2} = +\infty$.

(*iv*) Determinar $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{5x+2}{|x+1|}$.

Quando $x \to -1$, $|x+1| \to 0^+$. Assim,

$$\lim_{x\to -1} \frac{5x+2}{|x+1|} = \frac{\lim\limits_{x\to -1} (5x+2)}{\lim\limits_{x\to -1} |x+1|} = \frac{-3}{0^+} = -\infty\,.$$

(*v*) Determinar $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+3x+1}{x^2+x-6}$, $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+3x+1}{x^2+x-6}$

e $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+3x+1}{x^2+x-6}$.

Temos,

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+3x+1}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+3x+1}{(x-2)(x+3)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 2^+} (x^2+3x+1)}{\lim_{x\to 2^+} [(x-2)(x+3)]}$$

$$= \frac{11}{0^+}$$

$$= +\infty.$$

Ainda,

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+3x+1}{x^2+x-6} = \frac{\lim_{x\to 2^-} (x^2+3x+1)}{\lim_{x\to 2^-} [(x-2)(x+3)]}$$

$$= \frac{11}{0^-}$$

$$= -\infty.$$

Como

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+3x+1}{x^2+x-6} \neq \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+3x+1}{x^2+x-6} \quad \text{não existe o} \quad \lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x+1}{x^2+x-6}.$$

Porém, muitas vezes, calculando limites de uma maneira menos formal, escrevemos que

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x+1}{x^2+x-6} = \infty,$$

sem nos preocuparmos com o sinal.

(*vi*) Determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 3}{x + 2}$.

Dividindo o numerador e o denominador por x^2, temos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3}{x + 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(1 + \dfrac{3}{x^2}\right)}{\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{0^+}$$

$$= +\infty.$$

(*vii*) Determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5 - x^3}{8x + 2}$.

Dividindo o numerador e o denominador por x^3, temos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5 - x^3}{8x + 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{5}{x^3} - 1}{\dfrac{8}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} (5/x^3 - 1)}{\lim\limits_{x \to +\infty} (8/x^2 + 2/x^3)}$$

$$= \frac{-1}{0^+}$$

$$= -\infty.$$

(*viii*) Determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^4 + 3x^2 + 2x + 1}{4 - x^4}$.

Dividindo o numerador e o denominador por x^4, temos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^4 + 3x^2 + 2x + 1}{4 - x^4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{x^4}}{\dfrac{4}{x^4} - 1}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{x^4}\right)}{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{4}{x^4} - 1\right)}$$

$$= \frac{2}{-1}$$

$$= -2.$$

(*ix*) Determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 3x - 1}{x^3 - 2}$.

Dividindo o numerador e o denominador por x^3, temos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{x^3 - 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}}{1 - \dfrac{2}{x^3}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)}{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{2}{x^3} \right)}$$

$$= \frac{0}{1}$$

$$= 0.$$

(x) Mostrar que se $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ e $Q(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m$, então

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m}.$$

Temos,

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}.$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^n \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n} \right)}{x^m \left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{b_m}{x^m} \right)}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^n}{x^m} \cdot \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n} \right)}{\left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{b_m}{x^m} \right)}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^n}{x^m} \cdot \frac{a_0}{b_0}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m}.$$

3.13 EXERCÍCIOS

1. Se $f(x) = \dfrac{3x + |x|}{7x - 5|x|}$, calcule:

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

(b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2. Se $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$, calcule:

(a) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$.

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Nos exercícios 3 a 40 calcule os limites.

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^3 + 4x^2 - 1)$.

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{x^2}\right)$.

5. $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t+1}{t^2+1}$.

6. $\lim\limits_{t \to -\infty} \dfrac{t+1}{t^2+1}$.

7. $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t^2 - 2t + 3}{2t^2 + 5t - 3}$.

8. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^5 - 3x^3 + 2}{-x^2 + 7}$.

9. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^5 - x^2 + 7}{2 - x^2}$.

10. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-5x^3 + 2}{7x^3 + 3}$.

11. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x}$.

12. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\sqrt{x} + 3x - 10}{x^3}$.

13. $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t^2 - 1}{t - 4}$.

14. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\,(2x - 7\cos x)}{3x^2 - 5\,\text{sen}\,x + 1}$.

15. $\lim\limits_{v \to +\infty} \dfrac{v\sqrt{v} - 1}{3v - 1}$.

16. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$.

17. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$.

18. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$.

19. $\lim\limits_{x \to +\infty} x(\sqrt{x^2 - 1} - x)$.

20. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{3x^2 + 2x + 1} - \sqrt{2}x)$.

21. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{10x^2 - 3x + 4}{3x^2 - 1}$.

22. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1}$.

23. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^3 - x^2 + x - 1}{x^4 + x^3 - x + 1}$.

24. $\lim\limits_{s \to +\infty} \dfrac{8 - s}{\sqrt{s^2 + 7}}$.

25. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2 - 7}}{x + 3}$.

26. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{16x^4 + 15x^3 - 2x + 1} - 2x)$.

27. $\lim\limits_{s \to +\infty} \sqrt[3]{\dfrac{3s^7 - 4s^5}{2s^7 + 1}}$.

28. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2 - 7}}{x + 3}$.

29. $\lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{3 - y}{\sqrt{5 + 4y^2}}$.

30. $\lim\limits_{y \to -\infty} \dfrac{3 - y}{\sqrt{5 + 4y^2}}$.

31. $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x}{x - 3}$.

32. $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x}{x - 3}$.

33. $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x}{x^2 - 4}$.

34. $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x}{x^2 - 4}$.

35. $\lim\limits_{y \to 6^+} \dfrac{y+6}{y^2-36}$.

36. $\lim\limits_{y \to 6^-} \dfrac{y+6}{y^2-36}$.

37. $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{3-x}{x^2-2x-8}$.

38. $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{3-x}{x^2-2x-8}$.

39. $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{|x-3|}$.

40. $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{|x-3|}$.

3.14 LIMITES FUNDAMENTAIS

Daremos a seguir três proposições que caracterizam os chamados limites fundamentais. Estaremos tratando de casos particulares de indeterminações do tipo 0/0, 1^∞ e ∞^0.

3.14.1 Proposição. O $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ é igual a 1.

Prova. Consideremos a circunferência de raio 1 (Figura 3.10).

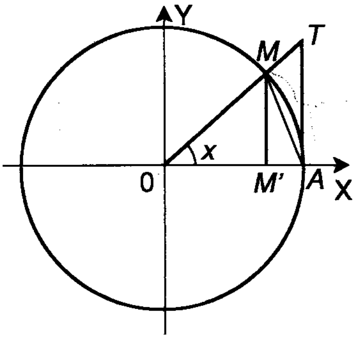


Figura 3-10

Seja x a medida em radianos do arco $\widehat{AOM}$. Limitamos a variação de x ao intervalo $(0, \pi/2)$.

Observando a Figura 3.10, escrevemos as desigualdades equivalentes:

$$\text{área } \Delta\, MOA \quad < \quad \text{área setor } MOA \quad < \quad \text{área } \Delta\, AOT$$

$$\frac{\overline{OA} \cdot \overline{MM'}}{2} \quad < \quad \frac{\overline{OA} \cdot \overset{\frown}{AM}}{2} \quad < \quad \frac{\overline{OA} \cdot \overline{AT}}{2}$$

$$\overline{MM'} \quad < \quad \overset{\frown}{AM} \quad < \quad \overline{AT}$$

$$\operatorname{sen} x \quad < \quad x \quad < \quad \operatorname{tg} x.$$

Dividindo a última desigualdade por sen x, já que sen $x > 0$ para $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, temos

$$1 \quad < \quad \frac{x}{\operatorname{sen} x} \quad < \quad \frac{1}{\cos x}$$

$$1 \quad > \quad \frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad > \quad \cos x. \qquad (1)$$

Por outro lado, sen x/x e cos x são funções pares. Então,

$$\frac{\operatorname{sen}(-x)}{(-x)} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad \text{e} \quad \cos(-x) = \cos x.$$

Portanto, a desigualdade (1) vale para qualquer x, $x \neq 0$.

Como $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ e $\lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$, pela proposição 3.5.3, segue que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

3.14.2 Exemplos

(*i*) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\, 2x}{x}$.

Por 3.14.1, podemos calcular limites do tipo

$$\lim_{u \to 0} \frac{\text{sen}\, u}{u},$$

onde u é uma função em x.

Neste exemplo, $u = 2x$ e $u \to 0$ quando $x \to 0$. Portanto,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, 2x}{x} = \lim_{u \to 0} \frac{\text{sen}\, u}{u/2} = 2 \lim_{u \to 0} \frac{\text{sen}\, u}{u} = 2 \cdot 1 = 2.$$

(*ii*) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\, 3x}{\text{sen}\, 4x}$.

Neste caso, faremos inicialmente alguns artifícios de cálculo como segue:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, 3x}{\text{sen}\, 4x} &= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\text{sen}\, 3x}{3x} \cdot 3x}{\dfrac{\text{sen}\, 4x}{4x} \cdot 4x} \\
&= \frac{3}{4} \frac{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\, 3x}{3x}}{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\, 4x}{4x}} \\
&= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1} \\
&= \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

(*iii*) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Temos neste caso,

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} \\
&= 1 \cdot 1 \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

3.14.3 Proposição. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (1 + 1/x)^x = e$, onde e é o número irracional neperiano cujo valor aproximado é 2,718281828459 ... .

Prova. A prova desta proposição envolve noções de séries, por este motivo será aqui omitida.

3.14.4 Exemplos

(*i*) Provar que $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$.

Em primeiro lugar provaremos que $\lim\limits_{x \to 0^+} (1 + x)^{1/x} = e$.

De fato, fazendo $x = 1/t$ temos que $t \to +\infty$ quando $x \to 0^+$. Logo,

$$\lim_{x \to 0^+} (1 + x)^{1/x} = \lim_{t \to +\infty} (1 + 1/t)^t = e\,.$$

Da mesma forma, prova-se que $\lim\limits_{x \to 0^-} (1 + x)^{1/x} = e\,.$

Portanto, $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e\,.$

(*ii*) Determinar $\lim\limits_{t \to 0} \ln(1 + t)^{1/t}$.

Usando a proposição 3.5.2(*g*), temos

$$\begin{aligned}\lim_{t \to 0} \ln(1 + t)^{1/t} &= \ln\left[\lim_{t \to 0} (1 + t)^{1/t}\right]\\ &= \ln e\\ &= 1.\end{aligned}$$

3.14.5 Proposição. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0, \quad a \neq 1).$

Pròva. Fazendo $t = a^x - 1$, temos

$$a^x = t + 1. \qquad (1)$$

Aplicando os logaritmos neperianos na igualdade (1), vem

$$\begin{aligned}\ln a^x &= \ln(t + 1)\\ x \ln a &= \ln(t + 1)\end{aligned}$$

$$x = \frac{\ln(t+1)}{\ln a}.$$

Quando $x \to 0$, $x \neq 0$ temos que $t \to 0$, $t \neq 0$ e então podemos escrever

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\dfrac{\ln(t+1)}{\ln a}}$$

$$= \ln a \cdot \lim_{t \to 0} \frac{1}{\dfrac{\ln(t+1)}{t}}$$

$$= \ln a \cdot \frac{\lim\limits_{t \to 0} 1}{\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\ln(t+1)}{t}}.$$

Considerando o exemplo 3.14.4(*ii*), concluímos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

3.14.6 Exemplos

(*i*) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$.

Temos,

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{b^x \left[\dfrac{a^x}{b^x} - 1 \right]}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} b^x \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x - 1}{x}$$

$$= 1 \cdot \ln \frac{a}{b}$$

$$= \ln a/b.$$

(*ii*) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{e^{x-1} - a^{x-1}}{x^2 - 1}$.

Neste exemplo, utilizamos artifícios de cálculo para aplicarmos a proposição 3.14.5.

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^{x-1} - a^{x-1}}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(e^{x-1} - 1) - (a^{x-1} - 1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1} \cdot \left[\lim_{x \to 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} - \lim_{x \to 1} \frac{a^{x-1} - 1}{x - 1} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\lim_{x \to 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} - \lim_{x \to 1} \frac{a^{x-1} - 1}{x - 1} \right].$$

Fazemos $t = x - 1$ e consideramos que, quando $x \to 1$, $x \neq 1$, temos $t \to 0$, $t \neq 0$.

Portanto,

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^{x-1} - a^{x-1}}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \left[\lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} - \lim_{t \to 0} \frac{a^t - 1}{t} \right]$$

$$= \frac{1}{2}(\ln e - \ln a)$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \ln a)\,.$$

3.15 EXERCÍCIOS

Nos exercícios 1 a 27, calcule os limites aplicando os limites fundamentais.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 9x}{x}\,.$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 4x}{3x}\,.$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 10x}{\text{sen } 7x}\,.$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } ax}{\text{sen } bx}\,,\ b \neq 0\,.$

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } ax}{x}\,.$

6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}^3\, x/2}{x^3}\,.$

7. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\text{tg}^3\, \dfrac{x+1}{4}}{(x+1)^3}\,.$

8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x}\,.$

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}\,.$

10. $\lim\limits_{x \to 3} (x - 3) \cdot \text{cosec}\, \pi x\,.$

11. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{6x - \text{sen } 2x}{2x + 3\, \text{sen } 4x}\,.$

12. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2}\,.$

13. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - 2\cos x + \cos 2x}{x^2}\,.$

14. $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + 1/n)^{n+5}\,.$

15. $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$.

16. $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{1 + x}\right)^x$.

17. $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{2n + 3}{2n + 1}\right)^{n+1}$.

18. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 + 1/\text{tg}\, x)^{\text{tg}\, x}$.

19. $\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}} (1 + \cos x)^{1/\cos x}$.

20. $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{10}{x}\right)^x$.

21. $\lim_{x \to 2} \frac{10^{x-2} - 1}{x - 2}$.

22. $\lim_{x \to -3} \frac{4^{\frac{x+3}{5}} - 1}{x + 3}$.

23. $\lim_{x \to 2} \frac{5^x - 25}{x - 2}$.

24. $\lim_{x \to 1} \frac{3^{\frac{x-1}{4}} - 1}{\text{sen}\, [5\,(x - 1)\,]}$.

25. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$.

26. $\lim_{x \to 0} \frac{\text{tgh}\, ax}{x}$.

27. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\text{sen}\, ax - \text{sen}\, bx}$.

3.16 CONTINUIDADE

Quando definimos $\lim_{x \to a} f(x)$ analisamos o comportamento da função $f(x)$ para valores de x próximos de a, mas diferentes de a. Em muitos exemplos vimos que $\lim_{x \to a} f(x)$ pode existir, mesmo que f não seja definida no ponto a. Se f está definida em a e $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, pode ocorrer que este limite seja diferente de $f(a)$.

Quando $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ diremos, de acordo com a definição abaixo, que f é contínua em a.

3.16.1 Definição. Dizemos que uma função f é contínua no ponto a se as seguintes condições forem satisfeitas:

(a) f é definida no ponto a;

(b) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe;

(c) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

A Figura 3.11, mostra esboços de gráficos de funções que não são contínuas em a.

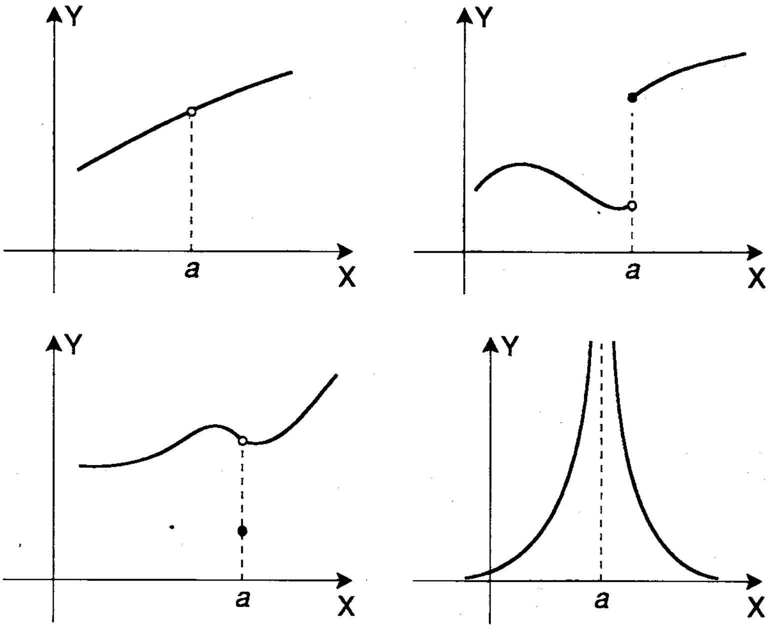


Figura 3-11

3.16.2 EXEMPLOS

(*i*) Sejam $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ e

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{se } x \neq 1 \\ 1, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

As funções f e g não são contínuas em $a = 1$. A função f não está definida em $a = 1$. Portanto, não satisfaz a condição (*a*) da definição 3.16.1. Já para a função g, temos $g(1) = 1$, mas

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2.$$

Logo, a condição (*c*) não se verifica no ponto $a = 1$.

A Figura 3.12, mostra um esboço do gráfico dessas funções.

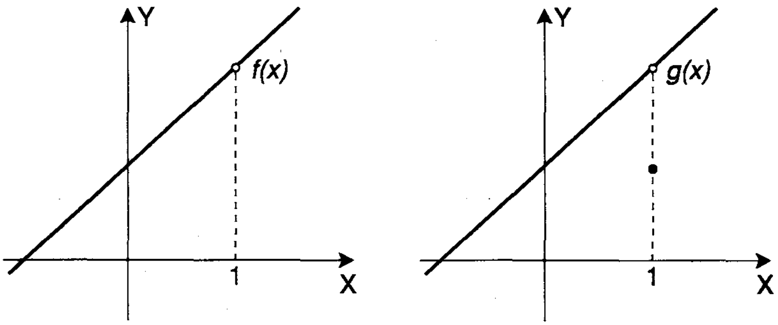


Figura 3-12

(*ii*) Sejam $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ e

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-2)^2}, & \text{se } x \neq 2 \\ 3, & \text{se } x = 2. \end{cases}$$

As funções f e g não são contínuas no ponto $a = 2$. A função f não está definida neste ponto e a função g, embora esteja definida em $a = 2$, não cumpre a condição (c) da definição 3.16.1 pois $\lim\limits_{x \to 2} g(x) \neq g(2)$.

A Figura 3.13, mostra os gráficos dessas funções.

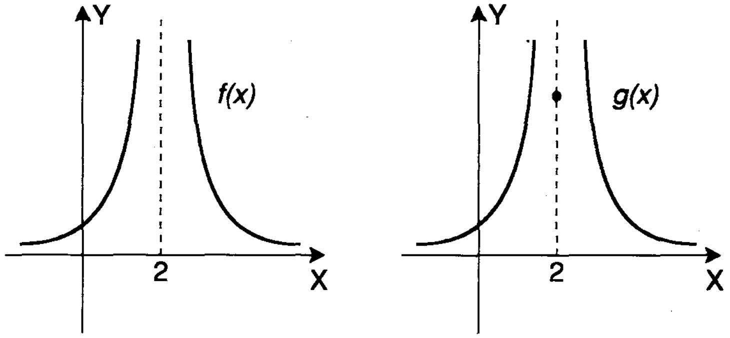


Figura 3-13

(*iii*) Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$

f não é contínua no ponto $a = 0$. De fato, se $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x}{x} = 1$. Assim, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$. Se $x < 0$, $f(x) = \dfrac{x}{-x} = -1$.

Logo, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$. Portanto, não existe $\lim_{x \to 0} f(x)$ e dessa forma f não é contínua em $a = 0$.

Na Figura 3.14, podemos ver um esboço do gráfico dessa função.

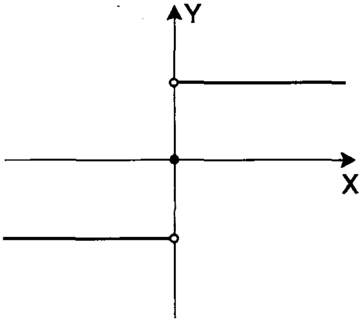


Figura 3-14

(*iv*) Seja $h(x) = \begin{cases} x + 3, & \text{se } x \geq -1 \\ -x + 1, & \text{se } x < -1. \end{cases}$

h é contínua em todos os pontos.

De fato, seja $a \in \mathbb{R}$. Se $a > -1$, temos

$$\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} (x + 3) = a + 3 = h(a).$$

Se $a < -1$, temos

$$\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} (-x + 1) = -a + 1 = h(a).$$

Se $a = -1$, temos

$$\lim_{x \to -1^+} h(x) = \lim_{x \to -1^+} (x + 3) = -1 + 3 = 2 = h(-1) \text{ e}$$

$$\lim_{x \to -1^-} h(x) = \lim_{x \to -1^-} (-x + 1) = -(-1) + 1 = 2.$$

Logo, $\lim\limits_{x \to -1^-} h(x) = 2 = h(-1).$

Podemos ver um esboço do gráfico de $h(x)$, na Figura 3.15.

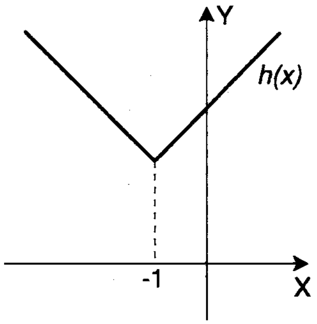


Figura 3-15

(*v*) Seja $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2}, & \text{se } x \neq -2 \\ 3, & \text{se } x = -2. \end{cases}$

Então, a função g não é contínua em $x = -2$, pois

$$\lim_{x \to -2^-} g(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{1}{x+2} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -2^+} g(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{1}{x+2} = +\infty\,.$$

Neste caso, embora a função g seja definida em $a = -2$, $\lim\limits_{x \to -2} g(x)$ não existe.

Podemos ver um esboço do gráfico de $g\,(x)$ na Figura 3.16.

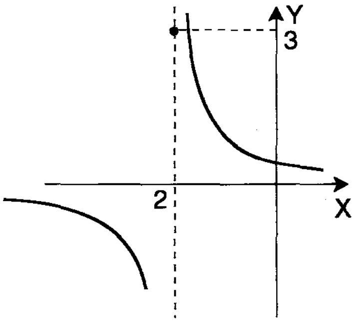


Figura 3-16

PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES CONTÍNUAS

3.16.3 Proposição. Se as funções f e g são contínuas em um ponto a, então:

(*i*) $f + g$ é contínua em a;

(*ii*) $f - g$ é contínua em a;

(*iii*) $f \cdot g$ é contínua em a;

(*iv*) f/g é contínua em a, desde que $g(a) \neq 0$.

Prova. Vamos provar o item (*iv*). Os demais ficam como exercício.

Suponhamos que $g(a) \neq 0$. Então f/g é definida no ponto a.

Como f e g são contínuas no ponto a, temos

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

Assim, pela proposição 3.5.2, temos

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = (f/g)(a).$$

Logo, f/g é contínua no ponto a.

3.16.4 Proposição.

(*i*) Uma função polinomial é contínua para todo número real.

(*ii*) Uma função racional é contínua em todos os pontos de seu domínio.

(*iii*) As funções $f(x) = \text{sen}\, x$ e $f(x) = \cos x$ são contínuas para todo número real x.

(*iv*) A função exponencial $f(x) = e^x$ é contínua para todo número real x.

A prova dessa proposição segue diretamente das propriedades de limites.

3.16.5 Proposição. Sejam f e g funções tais que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ e g é contínua em b.

Então $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = g(b)$, ou seja,

$$\lim_{x \to a} g[f(x)] = g\,[\lim_{x \to a} f(x)].$$

Prova. Queremos mostrar que $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = g(b)$, isto é, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$, tal que

$$|(g \circ f)(x) - g(b)| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta.$$

Como g é contínua em b, por definição, $\lim\limits_{y \to b} g(y) = g(b)$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_1 > 0$, tal que $|g(y) - g(b)| < \varepsilon$ sempre que $0 < |y - b| < \delta_1$.

Como para $y = b$, temos $|g(y) - g(b)| = 0 < \varepsilon$, podemos escrever

$$|g(y) - g(b)| < \varepsilon, \text{ sempre que } |y - b| < \delta_1 . \qquad (1)$$

Como $\lim_{x \to a} f(x) = b$ e $\delta_1 > 0$, pela definição de limite, $\exists\ \delta > 0$, tal que

$|f(x) - b| < \delta_1$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Portanto, se $0 < |x - a| < \delta$, $y = f(x)$ satisfaz (1) e dessa forma

$| g[f(x)] - g(b)| < \varepsilon$.

3.16.6 Proposição. Se f é contínua em a e g é contínua em $f(a)$, então a função composta $g_0 f$ é contínua no ponto a.

Prova. Como f é contínua no ponto a, temos $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Como g é contínua em $f(a)$, podemos aplicar a proposição 3.16.5. Temos, então

$$\lim_{x \to a} (g_0 f)(x) = g\left[\lim_{x \to a} f(x)\right] = g[(f(a)]$$
$$= (g_0 f)(a).$$

Logo, $g_0 f$ é contínua em a.

3.16.7 Proposição. Seja $y = f(x)$ uma função definida e contínua num intervalo I. Seja $J = \text{Im}(f)$. Se f admite uma função inversa $g = f^{-1}: J \to I$, então g é contínua em todos os pontos de J.

Observamos que, com o auxílio desta proposição, podemos analisar a continuidade das diversas funções inversas definidas no Capítulo 2. Por exemplo, a função

$$g: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$x \to \ln x$$

é contínua, já que ela é a inversa da função exponencial $f(x) = e^x$.

3.16.8 Definição. Seja f definida num intervalo fechado $[a, b]$.

(*i*) Se $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, dizemos que f é *contínua à direita* no ponto a.

(*ii*) Se $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$, dizemos que f é *contínua à esquerda* no ponto b.

(*iii*) Se f é contínua em todo ponto do intervalo aberto (a, b), f é contínua à direita em a e contínua à esquerda em b, dizemos que f é *contínua no intervalo fechado* $[a, b]$.

3.16.9 Teorema do Valor Intermediário. Se f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e L é um número tal que $f(a) \leq L \leq f(b)$ ou $f(b) \leq L \leq f(a)$, então existe pelo menos um $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = L$ (Ver Figura 3.17).

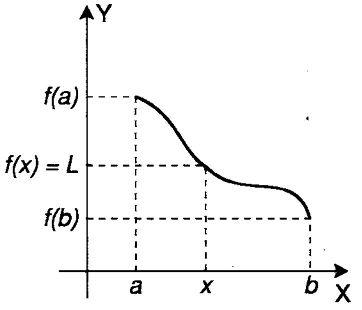


Figura 3-17

Esse teorema nos mostra por que as funções contínuas em um *intervalo* muitas vezes são consideradas como funções cujo gráfico pode ser traçado sem levantar o lápis do papel, isto é, não há interrupções no gráfico. Não apresentamos sua demonstração aqui.

Conseqüência. Se f é contínua em $[a, b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ tem sinais opostos, então existe pelo menos um número c entre a e b tal que $f(c) = 0$ (Ver Figura 3.18).

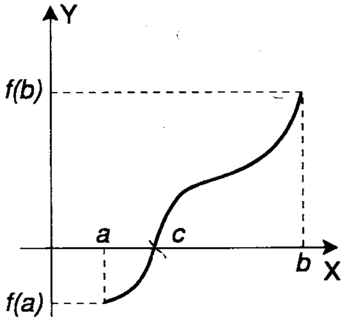


Figura 3-18

3.17 EXERCÍCIOS

1. Investigue a continuidade nos pontos indicados:

(*a*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen } x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ em $x = 0$.

(*b*) $f(x) = x - |x|$ em $x = 0$.

(*c*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$ em $x = 2$.

(*d*) $f(x) = \dfrac{1}{\text{sen } 1/x}$ em $x = 2$.

(*e*) $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ sen } 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ em $x = 0$.

(*f*) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 1 \\ 1 - |x|, & x > 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ em $x = 1$.

(*g*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$ em x = 2.

(*h*) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq -1 \\ 1 - |x|, & x < -1 \end{cases}$ em x = − 1.

(*i*) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 7}{x^2 + 1}$, em $x = 2$.

(*j*) $f(x) = \dfrac{2}{3x^2 + x^3 - x - 3}$, em $x = -3$.

2. Determine, se existirem, os valores de $x \in D(f)$, nos quais a função $f(x)$ não é contínua.

(*a*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2 - 1}, & x^2 \neq 1 \\ 0, & x = -1. \end{cases}$

(*b*) $f(x) = \dfrac{1 + \cos x}{3 + \operatorname{sen} x}$

(*c*) $f(x) = \dfrac{x - |x|}{x}$

(*d*) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 5x + 6}, & x < -3 \text{ e } x > -2 \\ -1, & -3 \leq x \leq -2 \end{cases}$

(*e*) $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

(*f*) $f(x) = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

(*g*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

(*h*) $f(x) = \cos \dfrac{x}{x + \pi}$

3. Faça o gráfico e analise a continuidade das seguintes funções:

a) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}, & x \neq -2 \\ 1, & x = -2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \ln(x + 1), & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 + 4x + 3}$.

4. Calcule p de modo que as funções abaixo sejam contínuas.

(*a*) $f(x) = \begin{cases} x^2 + px + 2, & x \neq 3 \\ 3, & x = 3 \end{cases}$

(*b*) $f(x) = \begin{cases} x + 2p, & x \leq -1 \\ p^2, & x > -1 \end{cases}$

(*c*) $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & , \quad x \neq 0 \\ p^3 - 7 , & x = 0 . \end{cases}$

5. Determine, se existirem, os pontos onde as seguintes funções não são contínuas.

(*a*) $f(x) = \dfrac{x}{(x-3)(x+7)}$

(*b*) $f(x) = \sqrt{(3-x)(6-x)}$

(*c*) $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2 \operatorname{sen} x}$

(*d*) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 1}{x^2 - 6x + 10}$

6. Prove que se $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas em $x_0 = 3$, também o são $f + g$ e $f \cdot g$.

7. Defina funções f, g e h que satisfaçam:

(*a*) f não é contínua em 2 pontos de seu domínio;

(*b*) g é contínua em todos os pontos de seu domínio mas não é contínua em $\mathbb{R}$;

(*c*) $h_0 f$ é contínua em todos os pontos do domínio de f;

Faça o gráfico das funções f, g, h e $h_0 f$.

8. Dê exemplo de duas funções f e g que não são contínuas no ponto $a = 0$ e tais que $h = f \cdot g$ é contínua neste ponto. Faça o gráfico das funções f, g e h.

9. Sejam f, g e h funções tais que, para todo x, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Se f e h são contínuas no ponto $x = a$ e $f(a) = g(a) = h(a)$, prove que g é contínua no ponto a.

10. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida no ponto a. Se $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = m$, prove que f é contínua no ponto a.

MAKRON
Books

CAPÍTULO 4

EDITORA DA UFSC

DERIVADA

Neste capítulo, estudaremos a DERIVADA. Veremos, inicialmente, que ela representa a inclinação de uma curva num ponto. Posteriormente, apresentaremos outras aplicações práticas, em diversos ramos da Física, Engenharia, Economia etc.

4.1 A RETA TANGENTE

Vamos definir a inclinação de uma curva $y = f(x)$ para, em seguida, encontrar a equação da reta tangente à curva num ponto dado.

As idéias que usaremos, foram introduzidas no século XVIII, por Newton e Leibnitz.

Seja $y = f(x)$ uma curva definida no intervalo (a, b), como na Figura 4.1.

Sejam $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ dois pontos distintos da curva $y = f(x)$.

Seja s a reta secante que passa pelos pontos P e Q. Considerando o triângulo retângulo PMQ, na Figura 4.1, temos que a inclinação da reta s (ou coeficiente angular de s) é

$$\text{tg } \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

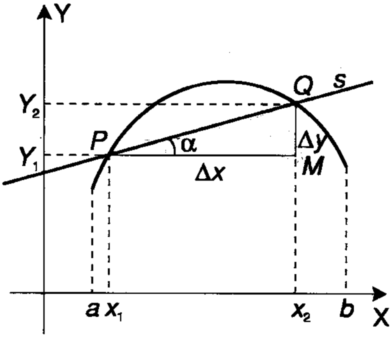


Figura 4-1

Suponhamos agora que, mantendo P fixo, Q se mova sobre a curva em direção a P. Diante disto, a inclinação da reta secante s variará. À medida que Q vai se aproximando cada vez mais de P, a inclinação da secante varia cada vez menos, tendendo para um valor limite constante (Ver Figura 4.2.).

Esse valor limite, é chamado inclinação da reta tangente à curva no ponto P, ou também inclinação da curva em P.

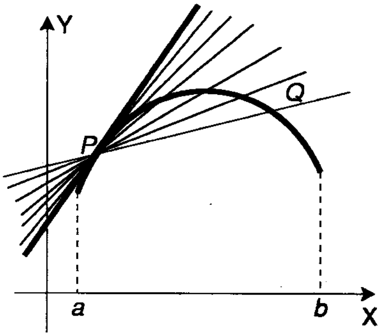


Figura 4-2

4.1.1 Definição. Dada uma curva $y = f(x)$, seja $P(x_1, y_1)$ um ponto sobre ela. A inclinação da reta tangente à curva no ponto P é dada por

$$m(x_1) = \lim_{Q \to P} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \tag{1}$$

quando o limite existe.

Fazendo $x_2 = x_1 + \Delta x$ podemos reescrever o limite (1) na forma

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}. \tag{2}$$

Conhecendo a inclinação da reta tangente à curva no ponto P podemos encontrar a equação da reta tangente à curva em P.

4.1.2 Equação da Reta Tangente.

Se a função $f(x)$ é contínua em x_1, então a reta tangente à curva $y = f(x)$ em $P(x_1, f(x_1))$ é:

(*i*) A reta que passa por P tendo inclinação

$m(x_1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$, se este limite existe. Neste caso temos a equação

$$y - f(x_1) = m(x - x_1). \tag{3}$$

(*ii*) A reta $x = x_1$ se $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ for infinito.

4.1.3 Exemplos

(*i*) Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = x^2 - 2x + 1$ no ponto (x_1, y_1).

Se $f(x) = x^2 - 2x + 1$, então

$f(x_1) = x_1^2 - 2x_1 + 1$ e

$$\begin{aligned} f(x_1 + \Delta x) &= (x_1 + \Delta x)^2 - 2(x_1 + \Delta x) + 1 \\ &= x_1{}^2 + 2x_1\Delta x + (\Delta x)^2 - 2x_1 - 2\Delta x + 1. \end{aligned}$$

Usando (2), vem

$$\begin{aligned} m(x_1) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1^2 + 2x_1\Delta x + (\Delta x^2) - 2x_1 - 2\Delta x + 1 - (x_1^2 - 2x_1 + 1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_1\Delta x + (\Delta x)^2 - 2\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_1 + \Delta x - 2)}{\Delta x} \\ &= 2x_1 - 2. \end{aligned}$$

Portanto, a inclinação da reta tangente à curva $y = x^2 - 2x + 1$ no ponto (x_1, y_1) é

$$m\,(x_1) = 2x_1 - 2.$$

(*ii*) Encontre a equação da reta tangente à curva $y = 2x^2 + 3$ no ponto cuja abscissa é 2.

O ponto da curva $y = 2x^2 + 3$, cuja abscissa é 2, é o ponto $P(2, f(2)) = (2, 11)$.

Vamos encontrar a inclinação da curva $y = 2x^2 + 3$ no ponto $P\ (2, 11)$. Para isso, encontraremos primeiro, a inclinação da curva num ponto (x_1, y_1). Temos,

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x_1 + \Delta x)^2 + 3 - (2x_1^2 + 3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_1^2 + 4x_1\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 3 - 2x_1^2 - 3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(4x_1 + 2\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= 4x_1.$$

Como $m(x_1) = 4x_1$, então $m(2) = 4 \cdot 2 = 8$.

Usando (3), escrevemos a equação da reta tangente à curva $y = 2x^2 + 3$ em $P(2, 11)$.

Temos,

$y - f(x_1) = m(x - x_1)$

$y - 11 = 8(x - 2)$, ou ainda,

$8x - y - 5 = 0$.

(*iii*) Encontre a equação da reta tangente à curva $y = \sqrt{x}$, que seja paralela à reta $8x - 4y + 1 = 0$.

Antes de desenvolvermos este exemplo, convém lembrar que duas retas são paralelas quando os seus coeficientes angulares são iguais.

Vamos primeiro encontrar a inclinação da reta tangente à curva $y = \sqrt{x}$ num ponto (x_1, y_1). Temos,

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x_1 + \Delta x} - \sqrt{x_1}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x_1 + \Delta x} - \sqrt{x_1})(\sqrt{x_1 + \Delta x} + \sqrt{x_1})}{\Delta x(\sqrt{x_1 + \Delta x} + \sqrt{x_1})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1 + \Delta x - x_1}{\Delta x(\sqrt{x_1 + \Delta x} + \sqrt{x_1})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x_1 + \Delta x} + \sqrt{x_1})}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x_1}}.$$

Portanto, $m(x_1) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_1}}$.

Como a reta que queremos deve ser paralela a $8x - 4y + 1 = 0$, podemos escrever

$m(x_1) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_1}} = 2$, já que o coeficiente angular de $8x - 4y + 1 = 0$ é 2.

De $\dfrac{1}{2\sqrt{x_1}} = 2$, concluímos que $x_1 = 1/16$.

Portanto, a reta que queremos é a reta tangente à curva $y = \sqrt{x}$ no ponto $(1/16, f(1/16))$, ou seja, $(1/16, 1/4)$. Temos,

$y - f(x_1) = m\,(x - x_1)$

$y - 1/4 = 2\,(x - 1/16)$

$16y - 4 = 32x - 2$

$32x - 16y + 2 = 0$, ou ainda,

$16x - 8y + 1 = 0.$

Graficamente, este exemplo é ilustrado na Figura 4.3.

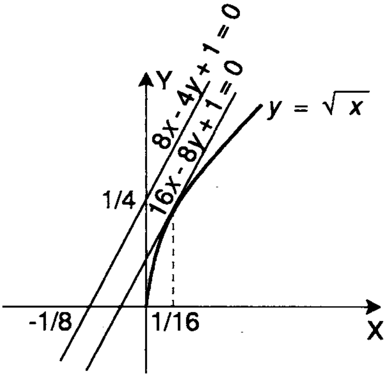


Figura 4-3

(*iv*) Encontre a equação para a reta normal à curva $y = x^2$ no ponto $P(2, 4)$.

Para resolvermos este exemplo, devemos lembrar que a *reta normal* a uma curva num ponto dado, é a reta perpendicular à reta tangente neste ponto.

Duas retas t e n são perpendiculares se

$$m_t \cdot m_n = -1, \tag{4}$$

onde m_t e m_n são as inclinações das retas t e n, respectivamente, num dado ponto P.

Vamos então calcular a inclinação da reta tangente à curva no ponto P (2, 4).

Usando (2), temos

$$m_t(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$m_t(x_1) = 2x_1.$

Quando $x_1 = 2$, temos $m_t(2) = 2 \cdot 2 = 4$.

Usando (4), podemos encontrar a inclinação da reta normal à curva $y = x^2$ no ponto (2, 4). Temos,

$$\begin{aligned} m_t \cdot m_n &= -1 \\ 4\,m_n &= -1 \\ m_n &= -1/4. \end{aligned}$$

Aplicando os dados à equação da reta, vem

$$y - f(x_1) = m\,(x - x_1)$$

$$y - 4 = -1/4\,(x - 2)$$

ou,

$$4y + x - 18 = 0.$$

Portanto, $x + 4y - 18 = 0$ é a reta normal à curva $y = x^2$ em (2, 4).

Graficamente, este exemplo é ilustrado na Figura 4.4.

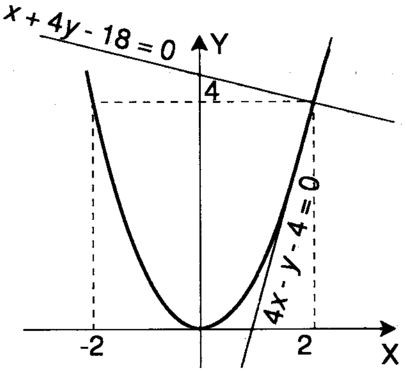


Figura 4-4

4.2 A DERIVADA DE UMA FUNÇÃO NUM PONTO

A derivada de uma função $f(x)$ no ponto x_1, denotada por $f'(x_1)$, (lê-se f linha de x, no ponto x_1), é definida pelo limite

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x},$$ quando este limite existe.

Também podemos escrever

$$f'(x_1) = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Como vimos na seção anterior, este limite nos dá a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(x_1, f(x_1))$. Portanto, geometricamente, a derivada da função $y = f(x)$ no ponto x_1, representa a inclinação da curva neste ponto.

4.3 A DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

A derivada de uma função $y = f(x)$ é a função denotada por $f'(x)$, (lê-se f linha de x), tal que, seu valor em qualquer $x \in D(f)$ é dado por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$ se este limite existir.

Dizemos que uma função é derivável quando existe a derivada em todos os pontos de seu domínio.

Outras notações podem ser usadas no lugar de $y' = f'(x)$:

(*i*) $D_x f(x)$ (lê-se derivada de $f(x)$ em relação a x).

(*ii*) $D_x y$ (lê-se derivada de y em relação a x).

(*iii*) $\dfrac{dy}{dx}$ (lê-se a derivada de y em relação a x).

4.4 EXEMPLOS

(*i*) Dada $f(x) = 5x^2 + 6x - 1$, encontre $f'(2)$.

Usando a definição 4.2, temos

$$
\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5(2 + \Delta x)^2 + 6(2 + \Delta x) - 1 - (5 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{20 + 20\Delta x + 5(\Delta x)^2 + 12 + 6\Delta x - 20 - 12}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{26\Delta x + 5(\Delta x)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(26 + 5\Delta x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (26 + 5\Delta x) \\
&= 26.
\end{aligned}
$$

(*ii*) Dada $f(x) = \dfrac{x - 2}{x + 3}$, encontre $f'(x)$.

Usando a definição 4.3, temos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{x + \Delta x - 2}{x + \Delta x + 3} - \dfrac{x - 2}{x + 3}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x - 2)(x + 3) - (x - 2)(x + \Delta x + 3)}{(x + \Delta x + 3)(x + 3) \cdot \Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + x + x\Delta x + 3\Delta x - 6 - x^2 - x\Delta x - x + 2\Delta x + 6}{(x + \Delta x + 3)(x + 3) \cdot \Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\Delta x}{(x + \Delta x + 3)(x + 3) \cdot \Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5}{(x + \Delta x + 3)(x + 3)}$$

$$= \frac{5}{(x + 3)^2}.$$

(*iii*) Dada $f(x) = \sqrt{x}$, encontre $f'(4)$.

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

$$= \frac{1}{4}.$$

(*iv*) Dada $f(x) = x^{1/3}$, encontre $f'(x)$.

Usando a definição 4.3, temos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^{1/3} - x^{1/3}}{\Delta x}.$$

Resolveremos este limite como no exemplo 3, da Seção 3.9, fazendo troca de variáveis.

Sejam $(x + \Delta x) = t^3$ e $x = a^3$. Então,

$$f'(x) = \lim_{t \to a} \frac{t - a}{t^3 - a^3}$$

$$= \lim_{t \to a} \frac{1}{t^2 + at + a^2}$$

$$= \frac{1}{3a^2}.$$

Como a = $x^{1/3}$, vem

$$f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}} \cdot$$

Observamos, neste exemplo, que $f(x) = x^{1/3}$ é contínua em 0, mas $f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}$ não é definida em 0.

4.5 CONTINUIDADE DE FUNÇÕES DERIVÁVEIS

De acordo com a observação feita no exemplo (*iv*) da Seção 4.4, concluímos que $f(x)$ contínua em x_1, não implica na existência de $f'(x_1)$. A recíproca porém é verdadeira, como mostra o seguinte teorema.

4.5.1 Teorema. Toda função derivável num ponto x_1 é contínua nesse ponto.

Prova. Seja $f(x)$ uma função derivável em x_1. Vamos provar que $f(x)$ é contínua em x_1. Em outras palavras, vamos provar que as condições da definição 3.16.1 são válidas. Isto é:

(*i*) $f(x_1)$ existe;

(*ii*) $\lim\limits_{x \to x_1} f(x)$ existe;

(*iii*) $\lim\limits_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$.

Por hipótese, $f(x)$ é derivável em x_1. Logo, $f'(x_1)$ existe e, pela fórmula

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1},$$

concluímos que $f(x_1)$ deve existir para que o limite tenha significado.

Além disso, temos

$$\lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1)] = \lim_{x \to x_1} \left[(x - x_1) \cdot \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \right]$$

$$= \lim_{x \to x_1} (x - x_1) \cdot \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

$$= 0 \cdot f'(x_1).$$

Portanto, $\lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1)] = 0$.

Temos então,

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = \lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1) + f(x_1)].$$

$$= \lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1)] + \lim_{x \to x_1} f(x_1)$$

$$= 0 + f(x_1)$$

$$= f(x_1).$$

Valem então as condições (*i*), (*ii*) e (*iii*) e conclui-se que $f(x)$ é contínua em x_1.

4.6 EXERCÍCIOS

1. Determinar a equação da reta tangente às seguintes curvas, nos pontos indicados. Esboçar o gráfico em cada caso.

a) $f(x) = x^2 - 1$; $x = 1$, $x = 0, x = a$, $a \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = x^2 - 3x + 6$; $x = -1$, $x = 2$.

c) $f(x) = x\,(3x - 5)$; $x = \dfrac{1}{2}$, $x = a$, $a \in \mathbb{R}$.

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $x = \dfrac{1}{3}$, $x = 3$.

e) $f(x) = \dfrac{1}{x - a}$, $a \in \mathbb{R} - \{-2, 4\}$; $x = -2$, $x = 4$.

f) $f(x) = 2\sqrt{x}$; $x = 0$, $x = 3$, $x = a$, $a > 0$.

2. Em cada um dos itens do exercício (1), determinar a equação da reta normal à curva, nos pontos indicados. Esboçar o gráfico, em cada caso.

3. Determinar a equação da reta tangente à curva $y = 1 - x^2$, que seja paralela à reta $y = 1 - x$.

4. Encontrar as equações das retas tangente e normal à curva $y = x^2 - 2x + 1$ no ponto $(-2, 9)$.

5. Encontrar a equação da reta tangente à curva $y = x^3 - 1$, que seja perpendicular à reta $y = -x$.

6. Dadas as funções $f(x) = 5 - 2x$ e $g(x) = 3x^2 - 1$, determinar:

   a) $f'(1) + g'(1)$ *b*) $2f'(0) - g'(-2)$

   c) $f(2) - f'(2)$ *d*) $[g'(0)]^2 + \dfrac{1}{2}g'(0) + g(0)$

   e) $f\left(\dfrac{5}{2}\right) - \dfrac{f'(5/2)}{g'(5/2)}$.

7. Usando a definição, determinar a derivada das seguintes funções:

   a) $f(x) = 1 - 4x^2$ *b*) $f(x) = 2x^2 - x - 1$ *c*) $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

   d) $f(x) = \dfrac{1 - x}{x + 3}$ *e*) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x - 1}}$ *f*) $f(x) = \sqrt[3]{x + 3}$.

8. Dadas as funções $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ e $g(x) = 2x^2 - 3$, determinar:

a) $f_0 f'$ *b*) $f'_0 f$ *c*) $g_0 f'$.

d) $g'_0 f'$ *e*) $f' + g'$ *f*) $f' - 2g'$

g) $f' \cdot g'/f$.

9. Dada a função $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$, verificar se existe $f'(0)$. Esboçar o gráfico.

10. Dada a função $f(x) = \dfrac{1}{2x-6}$, verificar se existe $f'(3)$. Esboçar o gráfico.

11. Dada a função $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$, determinar os intervalos em que:

a) $f'(x) > 0$ *b*) $f'(x) < 0$.

4.7 DERIVADAS LATERAIS

4.7.1 Definição. Se a função $y = f(x)$ está definida em x_1, então a derivada à direita de f em x_1, denotada por $f'_+(x_1)$, é definida por

$$f'_+(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{x \to x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1},$$

caso este limite exista.

4.7.2 Definição. Se a função $y = f(x)$ está definida em x_1, então a derivada à esquerda de f em x_1, denotada por $f'_-(x_1)$, é definida por

$$f'_-(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{x \to x_1^-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1},$$

caso este limite exista.

Uma função é derivável em um ponto, quando as derivadas à direita e à esquerda nesse ponto existem e são iguais.

Quando as derivadas laterais (direita e esquerda) existem e são diferentes em um ponto x_1, dizemos que este é um *ponto anguloso* do gráfico da função.

4.8 EXEMPLOS

(*i*) Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & \text{se } x < 2 \\ 7 - x, & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

(*a*) Mostre que f é contínua em 2.

(*b*) Encontre $f'_+(2)$ e $f'_-(2)$.

Na Figura 4.5 esboçamos o gráfico desta função.

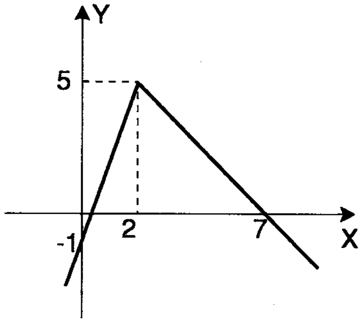


Figura 4-5

(a) Esta função é contínua em 2. De fato, existe $f(2) = 5$; existe o limite

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (7 - x) = \lim_{x \to 2^-} (3x - 1) = 5;$$

e finalmente,

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 5 .$$

(b) Obtemos $f'_+(2)$ usando a definição 4.7.1. Temos,

$$f'_+(2) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{[7 - (2 + \Delta x)] - 5}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{5 - \Delta x - 5}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} (-1)$$

$$= -1.$$

Usando a definição 4.7.2, obtemos $f'_-(2)$. Temos,

$$f'_-(2) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{[3(2 + \Delta x) - 1] - 5}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{6 + 3\Delta x - 1 - 5}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} 3$$

$$= 3.$$

Como

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} \neq \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x},$$

concluímos que não existe o

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}.$$

Portanto, a função $f(x)$ não é derivável em $x_1 = 2$.

Dizemos que $x_1 = 2$ é um *ponto anguloso do gráfico de* $f(x)$.

(*ii*) Seja a função $f(x) = (x - 2) \mid x \mid$. Encontre $f'_+ \ (0)$ e $f'_- \ (0)$.

Podemos reescrever a $f(x)$ como:

$$f(x) = \begin{cases} (x - 2) \cdot x = x^2 - 2x & , \text{ se } x \geq 0 \\ (x - 2) \cdot (-x) = -x^2 + 2x & , \text{ se } x < 0 . \end{cases}$$

A Figura 4.6 mostra o gráfico de $f\,(x)$.

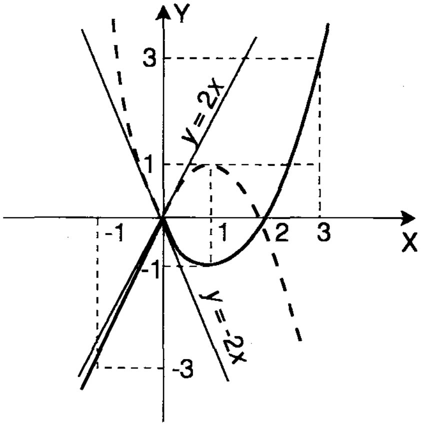


Figura 4-6

Usando 4.7.1 e 4.7.2, respectivamente, obtemos $f'_+ \ (0)$ e $f'_- \ (0)$.

Temos,

$$f'_+ \ (0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{[(0 + \Delta x)^2 - 2\,(0 + \Delta x)] - 0}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{(\Delta x)^2 - 2\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x(\Delta x - 2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} (\Delta x - 2)$$

$$= -2.$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{[-(0 + \Delta x)^2 + 2(0 + \Delta x)] - 0}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-(\Delta x)^2 + 2\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta x(-\Delta x + 2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} (-\Delta x + 2)$$

$$= 2.$$

Concluímos, então, que não existe $f'(0)$ porque $f'_+(0) \neq f'_-(0)$.

Ainda podemos concluir que o gráfico da função f tem duas tangentes no ponto $x = 0$. A Figura 4.6 mostra estas tangentes, dadas por

$$y - 0 = (-2)\,(x - 0), \text{ ou seja, } y = -2x$$

e

$$y - 0 = 2(x - 0), \text{ ou seja, } y = 2x.$$

4.9 EXERCÍCIOS

Nos exercícios 1 a 5 calcular as derivadas laterais nos pontos onde a função não é derivável. Esboçar o gráfico.

1. $f(x) = 2|x - 3|$

2. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 1 \\ 2x - 1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

3. $f(x) = |2x + 4| + 3$

4. $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| > 1 \\ 0, & |x| \leq 1 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & x < -2 \\ -2 & |x| \leq 2 \\ 2x - 6, & x < 2. \end{cases}$

6. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{se } |x| \leq 1 \\ 1 - x^2, & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$

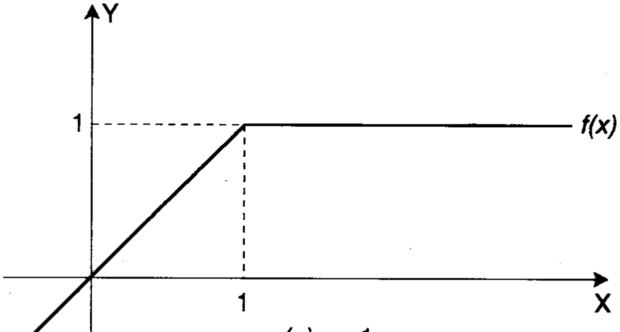
a) Esboçar o gráfico de f.

b) Verificar se f é contínua nos pontos -1 e 1.

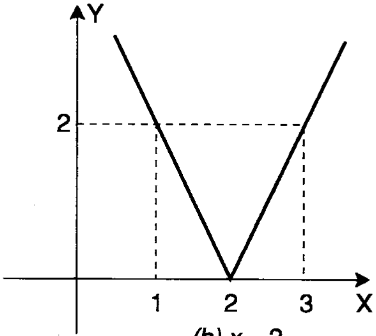
c) Calcular $f'(-1^-)$, $f'(-1^+)$, $f'(1^-)$ e $f'(1^+)$.

d) Calcular $f'(x)$, obter o seu domínio e esboçar o gráfico.

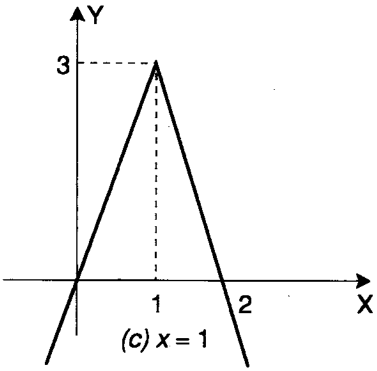
7. Encontrar as derivadas laterais das seguintes funções, nos pontos indicados. Encontrar os intervalos onde $f'(x) > 0$ e $f'(x) < 0$.



(a) $x = 1$



(b) $x = 2$



(c) $x = 1$

4.10 REGRAS DE DERIVAÇÃO

Nesta seção, deduziremos várias regras, chamadas regras de derivação, que permitem determinar as derivadas das funções sem o uso da definição.

4.10.1 Proposição (Derivada de uma Constante). Se c é uma constante e $f(x) = c$ para todo x, então $f'(x) = 0$.

Prova. Seja $f(x) = c$. Então,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 0 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

4.10.2 Proposição (Regra da Potência). Se n é um número inteiro positivo e $f(x) = x^n$, então $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Prova. Seja $f(x) = x^n$. Então,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}.
\end{aligned}
$$

Expandindo $(x + \Delta x)^n$ pelo Binômio de Newton, temos

$$f'(x) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n] - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \ldots + nx(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} [nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \Delta x + \ldots + nx(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}]$$

$$= n \cdot x^{n-1}.$$

4.10.3 Exemplos

(*i*) Se $f(x) = x^5$ então $f'(x) = 5x^4$.

(*ii*) Se $g(x) = x$ então $g'(x) = 1$.

(*iii*) Se $h(x) = x^{10}$ então $h'(x) = 10x^9$.

4.10.4 Proposição (Derivada do Produto de uma Constante por uma Função). Sejam f uma função, c uma constante e g a função definida por $g(x) = c\,f(x)$. Se $f'(x)$ existe, então $g'(x) = c\,f'(x)$.

Prova. Por hipótese, existe

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Temos,

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x + \Delta x) - cf(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} c \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= c\,f'(x).$$

4.10.5 Exemplos

(*i*) Se $f(x) = 8x^2$ então $f'(x) = 8(2x) = 16x$.

(*ii*) Se $g(z) = -2z^7$ então $g'(z) = -2(7z^6) = -14z^6$.

4.10.6 Proposição (Derivada de uma Soma). Sejam f e g duas funções e h a função definida por $h(x) = f(x) + g(x)$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então

$$h'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Prova. Por hipótese, existem

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{e} \quad g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Temos,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)] + [g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

A proposição 4.10.6 se aplica para um número finito de funções, isto é, a derivada da soma de um número finito de funções é igual à soma de suas derivadas, se estas existirem.

4.10.7 Exemplos

(*i*) Seja $f(x) = 3x^4 + 8x + 5$. Então,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cdot (4x^3) + 8 \cdot 1 + 0 \\ &= 12x^3 + 8. \end{aligned}$$

(*ii*) Seja $g(y) = 9y^5 - 4y^2 + 2y + 7$. Então,

$$\begin{aligned} g'(y) &= 9 \cdot (5y^4) - 4 \cdot (2y) + 2 \cdot 1 + 0 \\ &= 45y^4 - 8y + 2. \end{aligned}$$

4.10.8 Proposição (Derivada de um Produto). Sejam f e g funções e h a função definida por $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então

$$h'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x).$$

Prova. Por hipótese, existem

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{e} \quad g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Também podemos concluir, pelo teorema 4.5.1, que f é contínua e assim $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x)$. Temos,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Adicionando e subtraindo ao numerador a expressão $f(x + \Delta x) \cdot g(x)$, vem

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\ g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)g(x) + f(x+\Delta x)\ g(x) - f(x)\,g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x)\ [g(x + \Delta x) - g(x)] + g(x)[f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x + \Delta x) \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x} \right]$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \left[g(x) \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} g(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x).$$

4.10.9 Exemplos

(*i*) Seja $f(x) = (2x^3 - 1)(x^4 + x^2)$. Então,

$f'(x) = (2x^3 - 1)(4x^3 + 2x) + (x^4 + x^2)(6x^2)$.

(*ii*) Seja $f(t) = \frac{1}{2}(t^2 + 5)(t^6 + 4t)$. Então,

$f'(t) = \frac{1}{2}[(t^2 + 5)(6t^5 + 4) + (t^6 + 4t)(2t)]$.

4.10.10 Proposição (Derivada de um Quociente). Sejam f e g funções e h a função definida por $h(x) = f(x)/g(x)$, onde $g(x) \neq 0$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então

$$h'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Prova. Por hipótese, existem

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{e} \quad g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Temos também, pelo teorema 4.5.1, que g é contínua e assim $\lim_{\Delta x \to 0} g(x + \Delta x) = g(x)$. Temos,

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{f(x + \Delta x)\, g(x) - f(x)\, g(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)\, g(x)} \right].$$

Subtraindo e adicionando $f(x) \cdot g(x)$ ao numerador, obtemos

$$h'(x) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{f(x + \Delta x)g(x) - f(x)\, g(x) + f(x)\, g(x) - f(x)g(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)\, g(x)} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x) - f(x) \cdot \dfrac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{g(x+\Delta x) \cdot g(x)} \right]$$

$$= \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x) - \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x)}$$

$$= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x) \cdot g(x)}$$

$$= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

4.10.11 Exemplos

(*i*) Encontrar $f'(x)$ sendo $f(x) = \dfrac{2x^4 - 3}{x^2 - 5x + 3}$.

Temos,

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 5x + 3)(2 \cdot 4x^3 - 0) - (2x^4 - 3)(2x - 5)}{(x^2 - 5x + 3)^2}$$

$$= \frac{(x^2 - 5x + 3)(8x^3) - (2x^4 - 3)(2x - 5)}{(x^2 - 5x + 3)^2}.$$

(*ii*) Se $g(x) = \dfrac{1}{x}$, encontrar $g'(x)$.

Temos,

$$g'(x) = \frac{x \cdot 0 - 1 \cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{-1}{x^2}.$$

4.10.12 Proposição. Se $f(x) = x^{-n}$ onde n é um inteiro positivo e $x \neq 0$, então $f'(x) = -n \cdot x^{-n-1}$.

Prova. Podemos escrever $f(x) = \frac{1}{x^n}$.

Aplicando a proposição 4.10.10, vem

$$f'(x) = \frac{x^n \cdot 0 - 1 \cdot nx^{n-1}}{(x^n)^2}$$

$$= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}$$

$$= -n \cdot x^{n-1} \cdot x^{-2n}$$

$$= -n\, x^{-n-1}.$$

4.11 EXERCÍCIOS

Nos exercícios de 1 a 22, encontrar a derivada das funções dadas.

1. $f(r) = \pi r^2$
2. $f(x) = 3x^2 + 6x - 10$
3. $f(w) = aw^2 + b$
4. $f(x) = 14 - \frac{1}{2}x^{-3}$

5. $f(x) = (2x + 1)(3x^2 + 6)$

6. $f(x) = (7x - 1)(x + 4)$

7. $f(x) = (3x^5 - 1)(2 - x^4)$

8. $f(x) = \frac{2}{3}(5x - 3)^{-1}(5x + 3)$

9. $f(x) = (x - 1)(x + 1)$

10. $f(s) = (s^2 - 1)(3s - 1)(5s^3 + 2s)$.

11. $f(x) = 7(ax^2 + bx + c)$

12. $f(u) = (4u^2 - a)(a - 2u)$

13. $f(x) = \dfrac{2x + 4}{3x - 1}$

14. $f(t) = \dfrac{t - 1}{t + 1}$

15. $f(t) = \dfrac{3t^2 + 5t - 1}{t - 1}$

16. $f(t) = \dfrac{2 - t^2}{t - 2}$

17. $f(x) = \dfrac{4 - x}{5 - x^2}$

18. $f(x) = \dfrac{5x + 7}{2x - 2}$

19. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x + 2}(3x^2 + 6x)$

20. $f(t) = \dfrac{(t - a)^2}{t - b}$

21. $f(x) = \dfrac{3}{x^4} + \dfrac{5}{x^5}$

22. $f(x) = \dfrac{1}{2}x^4 + \dfrac{2}{x^6}$.

23. Seja $p(x) = (x - a)(x - b)$, a e b constantes. Mostrar que se $a \neq b$ então $p(a) = p(b) = 0$, mas $p'(a) \neq 0$ e $p'(b) \neq 0$.

24. Dadas as funções $f(x) = x^2 + Ax$ e $g(x) = Bx$, determinar A e B de tal forma que

$$\begin{cases} f'(x) + g'(x) = 1 + 2x \\ f(x) - g(x) = x^2. \end{cases}$$

25. Dada a função $f(t) = 3t^3 - 4t + 1$, encontrar $f(0) - tf'(0)$.

26. Encontrar a equação da reta tangente à curva $y = \dfrac{2x + 1}{3x - 4}$ no ponto de abscissa $x = -1$.

27. Encontrar a equação da reta normal à curva $y = (3x^2 - 4x)^2$ no ponto de abscissa $x = 2$.

28. Encontrar as equações das retas tangentes à curva $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ que sejam paralelas à reta $y = x$.

29. Em que pontos o gráfico da função $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x$ tem tangente horizontal?

30. Seja $y = ax^2 + bx$. Encontrar os valores de a e b sabendo que a tangente à curva no ponto $(1, 5)$ tem inclinação $m = 8$.

4.12 DERIVADA DE FUNÇÃO COMPOSTA

Consideremos duas funções deriváveis f e g onde $y = g(u)$ e $u = f(x)$.

Para todo x tal que $f(x)$ está no domínio de g, podemos escrever $y = g(u) = g\,[f(x)]$, isto é, podemos considerar a função composta $(g \circ f)\ (x)$.

Por exemplo, uma função tal como $y = (x^2 + 5x + 2)^7$ pode ser vista como a composta das funções $y = u^7 = g(u)$ e $u = x^2 + 5x + 2 = f(x)$.

A seguir apresentamos a regra da cadeia, que nos dá a derivada da função composta $g \circ f$ em termos das derivadas de f e g.

4.12.1 Proposição (Regra da Cadeia). Se $y = g(u)$, $u = f(x)$ e as derivadas dy/du e du/dx existem, então a função composta $y = g\,[f(x)]$ tem derivada que é dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{ou} \quad y\,'(x) = g\,'(u) \cdot f\,'(x)\,.$$

Prova Parcial. Vamos fazer a demonstração supondo que existe um intervalo aberto I contendo x, tal que

$$\Delta u = [f\,(x + \Delta x) - f(x)] \neq 0 \text{ sempre que } (x + \Delta x) \in I \text{ e } \Delta x \neq 0. \qquad (1)$$

Isso se verifica para um grande número de funções, porém não para todas. Por exemplo, se f for uma função constante a condição acima não é satisfeita. Porém neste

caso, podemos provar a fórmula facilmente. De fato, se $f(x) = c$ então $f'(x) = 0$ e $y = g[f(x)] = g(c)$ é constante. Assim, $y'(x) = 0 = g'(u) \cdot f'(x)$.

Então provemos que $y'(x) = g'(u) \cdot f'(x)$ quando $f(x)$ satisfaz a condição (1).

Como $y = g[f(x)]$, temos

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g[f(x + \Delta x)] - g[f(x)]}{\Delta x}$$ se este limite existir.

Vamos considerar primeiro o quociente

$$\frac{g[f(x + \Delta x)] - g[f(x)]}{\Delta x}.$$

Seja $\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x)$. Então Δu depende de Δx e $\Delta u \to 0$ quando $\Delta x \to 0$. Temos,

$$\frac{g[f(x + \Delta x)] - g[f(x)]}{\Delta x} = \frac{g[f(x) + \Delta u] - g[f(x)]}{\Delta x}$$

$$= \frac{g(u + \Delta u) - g(u)}{\Delta x}.$$

Pela condição (1), $\Delta u \neq 0$ em um intervalo aberto contendo x. Assim, podemos dividir e multiplicar o quociente acima por Δu. Temos então,

$$\frac{g[f(x + \Delta x)] - g[f(x)]}{\Delta x} = \frac{g(u + \Delta u) - g(u)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$= \frac{g(u + \Delta u) - g(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \frac{g(u + \Delta u) - g(u)}{\Delta u} \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Aplicando o limite, temos

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g[f(x+\Delta x)] - g[f(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{g(u+\Delta u) - g(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= g'(u) \cdot f'(x).$$

4.12.2 Exemplos

(*i*) Dada a função $y = (x^2 + 5x + 2)^7$, determinar dy/dx.

Vimos anteriormente que podemos escrever $y = g(u) = u^7$, onde $u = x^2 + 5x + 2$. Assim, pela regra da Cadeia,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= 7u^6 \cdot (2x+5)$$

$$= 7(x^2+5x+2)^6 \cdot (2x+5).$$

(*ii*) Dada a função $y = \left(\frac{3x+2}{2x+1}\right)^5$, encontrar y'.

Podemos escrever $y = u^5$, onde $u = \frac{3x+2}{2x+1}$. Aplicando a regra da cadeia, temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= 5u^4 \cdot \frac{(2x+1) \cdot 3 - (3x+2) \cdot 2}{(2x+1)^2}$$

$$= 5 \cdot \left(\frac{3x+2}{2x+1}\right)^4 \cdot \frac{6x+3-6x-4}{(2x+1)^2}$$

$$= 5 \cdot \left(\frac{3x+2}{2x+1}\right)^4 \cdot \frac{-1}{(2x+1)^2}.$$

(*iii*) Dada a função $y = (3x^2 + 1)^3 \cdot (x - x^2)^2$, determinar dy/dx.

Neste caso temos o produto de duas funções

$f(x) = (3x^2 + 1)^3$ e $g(x) = (x - x^2)^2$.

Assim, pela proposição 4.10.8,

$y'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$.

Encontrando $f'(x)$ e $g'(x)$ pela regra da cadeia, temos

$f'(x) = 3(3x^2 + 1)^2 \cdot 6x$ e $g'(x) = 2(x - x^2) \cdot (1 - 2x)$.

Logo,

$$y'(x) = (3x^2+1)^3 \cdot 2(x-x^2)(1-2x) + 3(3x^2+1)^2 \cdot 6x \cdot (x-x^2)^2$$

$$= 2(3x^2+1)^3 (x-x^2)(1-2x) + 18x(3x^2+1)^2(x-x^2)^2.$$

4.12.3 Proposição. Se $u = g(x)$ é uma função derivável e n é um número inteiro não nulo, então

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n \cdot [g(x)]^{n-1} \cdot g'(x).$$

Prova. Fazendo $y = u^n$, onde $u = g(x)$ e aplicando a regra da cadeia, temos

$$y'(x) = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dx}[g(x)]^n = n \cdot [g(x)]^{n-1} \cdot g'(x).$$

A regra da potência pode ser generalizada como segue:

Se $u = g(x)$ é uma função derivável e r é um número racional não nulo qualquer, então

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^r = r\,[g(x)]^{r-1} \cdot g'(x),$$

ou ainda,

$$(u^r)' = r \cdot u^{r-1} \cdot u'.$$

4.12.4 Exemplos

(*i*) Dada a função $f(x) = 5\sqrt{x^2 + 3}$, determinar $f'(x)$.

Podemos escrever

$f(x) = 5(x^2 + 3)^{1/2}$.

Assim,

$$f'(x) = 5 \cdot \frac{1}{2}(x^2+3)^{-1/2} \cdot 2x$$

$$= \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 3}}.$$

(*ii*) Dada a função $g(t) = \dfrac{t^2}{\sqrt[3]{t^3 + 1}}$, determinar $g'(t)$.

Escrevendo a função dada como um produto, temos

$g(t) = t^2.(t^3 + 1)^{-1/3}$.

Assim,

$$g'(t) = t^2\left(\frac{-1}{3}\right)\left(t^3 + 1\right)^{\frac{-1}{3} - 1} \cdot 3t^2 + (t^3 + 1)^{-1/3} \cdot 2t$$

$$= -t^4(t^3 + 1)^{-4/3} + 2t(t^3 + 1)^{-1/3}.$$

Podemos resumir as proposições da Seção 4.10 e 4.12 na seguinte *tabela de derivadas*.

4.12.5 Tabela. Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ funções deriváveis e c uma constante qualquer.

(*1*) $y = c \Rightarrow y' = 0$

(*2*) $y = x \Rightarrow y' = 1$.

(*3*) $y = c \cdot u \Rightarrow y' = c \cdot u'$

(*4*) $y = u + v \Rightarrow y' = u' + v'$

(*5*) $y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$

(*6*) $y = \dfrac{u}{v} \Rightarrow y' = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}$

(*7*) $y = u^\alpha,\ 0 \neq \alpha \in Q \Rightarrow y' = \alpha u^{\alpha - 1} \cdot u'$.

A Tabela 4.12.5 nos ajuda a determinar as derivadas de algumas funções.

4.12.6 Exemplos. Determinar a derivada das funções:

(*i*) $y = x^8 + (2x+4)^3 + \sqrt{x}$.

$$y' = 8x^7 + 3(2x+4)^2 \cdot 2 + \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$= 8x^7 + 6(2x+4)^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(*ii*) $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-3}}$.

$$y' = \frac{(\sqrt{x^2-3}) \cdot 1 - (x+1) \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2-3)^{-1/2} \cdot 2x}{(\sqrt{x^2-3})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-3} - x(x+1)/\sqrt{x^2-3}}{x^2-3}$$

$$= \frac{\dfrac{(x^2-3) - x(x+1)}{\sqrt{x^2-3}}}{x^2-3}$$

$$= \frac{-3-x}{(x^2-3)\sqrt{x^2-3}}.$$

(*iii*) $y = 3x\,(8x^3-2)$.

$$y' = 3x\,(24x^2) + (8x^3-2) \cdot 3$$

$$= 72x^3 + 24x^3 - 6$$

$$= 96x^3 - 6.$$

(*iv*) $y = \sqrt[3]{6x^2 + 7x + 2}$.

Podemos escrever $y = (6x^2 + 7x + 2)^{1/3}$.

Temos,

$$y' = \frac{1}{3}(6x^2 + 7x + 2)^{-2/3} \cdot (12x + 7)$$

$$= \frac{12x + 7}{3\sqrt[3]{(6x^2 + 7x + 2)^2}} .$$

4.13 TEOREMA (DERIVADA DA FUNÇÃO INVERSA)

Seja $y = f(x)$ uma função definida em um intervalo aberto (a, b). Suponhamos que $f(x)$ admita uma função inversa $x = g(y)$ contínua. Se $f'(x)$ existe e é diferente de zero para qualquer $x \in (a, b)$, então $g = f^{-1}$ é derivável e vale

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'[g(y)]} .$$

Prova. A Figura 4.7 nos auxiliará a visualizar a demonstração que segue.

Sejam $y = f(x)$ e $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Observamos que, como f possui uma inversa, se $\Delta x \neq 0$ temos que $f(x + \Delta x) \neq f(x)$ e portanto, $\Delta y \neq 0$. Como f é contínua, quando $\Delta x \to 0$ temos que Δy também tende a zero.

Da mesma forma, quando $\Delta y \to 0$, $\Delta x = g(y + \Delta y) - g(y)$ também tende a zero.

Temos então,

$$\Delta x \to 0 \Leftrightarrow \Delta y \to 0. \qquad (1)$$

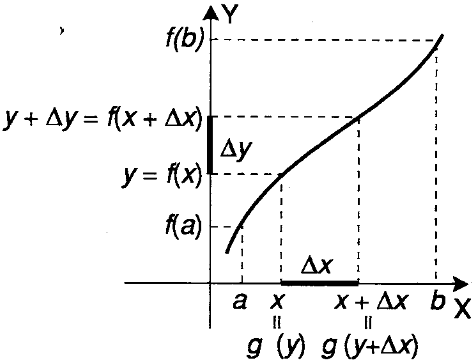


Figura 4-7

Por outro lado, para qualquer $y = f(x)$ vale a identidade

$$\frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y} = \frac{(x + \Delta x) - x}{f(x + \Delta x) - f(x)}$$

$$= \frac{\Delta x}{f(x + \Delta x) - f(x)}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}.$$

Como $f'(x)$ existe e $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, usando (1), vem

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

$$= \frac{1}{f'(x)}.$$

Concluímos que $g'(y)$ existe e vale $g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

4.13.1 Exemplos

(*i*) Seja $y = f(x) = 4x - 3$. A sua inversa é dada por

$$x = g(y) = \frac{1}{4}(y + 3).$$

Podemos ver que as derivadas, $f'(x) = 4$ e $g'(y) = 1/4$ são inversas uma da outra.

(*ii*) Seja $y = 8x^3$. Sua inversa é $x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{y}$.

Como $y' = 24x^2$ é maior que zero para todo $x \neq 0$, temos

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{24x^2} = \frac{1}{24\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{y}\right)^2} = \frac{1}{6y^{2/3}}.$$

Para $x = 0$, temos $y = 0$ e $y' = 0$. Portanto, não podemos aplicar o teorema 4.13.

4.14. DERIVADAS DAS FUNÇÕES ELEMENTARES

Nesta seção apresentaremos as derivadas das funções elementares: exponencial, logarítmica, trigonométricas, trigonométricas inversas, hiperbólicas e hiperbólicas inversas.

Apresentaremos uma tabela de Regras de Derivação que será usada no decorrer de todo o estudo de Cálculo Diferencial e Integral.

4.14.1 Proposição (Derivada da função exponencial) Se $y = a^x$, $(a > 0$ e $a \neq 1)$ então

$$y' = a^x \ln a \ (a > 0 \text{ e } a \neq 1).$$

Prova. Seja $y = a^x$ $(a > 0$ e $a \neq 1)$. Aplicando a definição 4.3, temos

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x + \Delta x} - a^x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x \, (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} a^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} .$$

Como $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ é o limite fundamental provado na Seção 3.14.5, vem

$$y' = a^x \cdot \ln a.$$

Caso Particular:

Se $y = e^x$ então $y' = e^x \cdot \ln e = e^x$, onde e é o número neperiano.

4.14.2 Proposição (Derivada da função logarítmica). Se $y = \log_a x$ $(a > 0$, $a \neq 1)$, então

$$y' = \frac{1}{x} \log_a e \quad (a > 0 \, , a \neq 1).$$

Prova. Seja $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

Aplicando a definição 4.3, temos

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \dfrac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{\Delta x} \cdot \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{1/\Delta x}.$$

Usando a proposição 3.5.2(g), podemos escrever

$$y' = \log_a \left[\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{1/\Delta x} \right]$$

$$= \log_a \left[\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x / \Delta x}{x / \Delta x} \right)^{1/\Delta x} \right]$$

$$= \log_a \left[\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{1}{x / \Delta x} \right)^{1/\Delta x \cdot x/x} \right]$$

$$= \log_a \left[\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{1}{x/\Delta x} \right)^{x/\Delta x} \right]^{1/x}$$

$$= \frac{1}{x} \log_a \left[\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{1}{x/\Delta x} \right)^{x/\Delta x} \right] .$$

Usando o limite fundamental da Seção 3.14.3, vem

$$y' = \frac{1}{x} \log_a e .$$

Caso Particular:

Se $y = \ln x$ então $y' = \frac{1}{x} \cdot \ln e$

$$= \frac{1}{x}.$$

4.14.3 Proposição (Derivada da função exponencial composta). Se $y = u^v$, onde $u = u(x)$ e $v = v(x)$ são funções de x, deriváveis num intervalo I e $u(x) > 0$, $\forall\ x \in$ I então $y' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'$.

Prova. Usando as propriedades de logaritmos, podemos escrever

$$y = u^v = e^{v \cdot \ln u} .$$

Portanto, $y = (g \circ f)(x)$, onde $g(w) = e^w$ e $w = f(x) = v \cdot \ln u$.

Como existem as derivadas

$g'(w) = e^w$ e

$$f'(x) = (v \cdot \ln u)' = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} ,$$

pela regra da Cadeia, temos

$$\begin{aligned} y' &= g'(w) \cdot f'(x) \\ &= e^w \left(v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right) \\ &= e^{v \cdot \ln u} \left(v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right) \\ &= u^v \cdot \ln u \cdot v' + v\, u^{v-1} \cdot u'. \end{aligned}$$

Se $u(x)$ é uma função derivável, aplicando a regra da Cadeia podemos generalizar as proposições da Seção 4.14. Acrescentamos as seguintes fórmulas em nossa *tabela de derivadas*.

(*8*) $y = a^u \ (a > 0, a \neq 1) \quad \Rightarrow \quad y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$

(*9*) $y = e^u \quad \Rightarrow \quad y' = e^u \cdot u'$

(*10*) $y = \log_a u \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{u'}{u} \log_a e$

(*11*) $y = \ln u \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{u'}{u}$

(*12*) $y = u^v \quad \Rightarrow \quad y' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v', \ u > 0$.

4.14.4 Exemplos. Determinar a derivada das funções:

(*i*) $y = 3^{2x^2 + 3x - 1}$.

Fazendo $u = 2x^2 + 3x - 1$, temos $y = 3^u$. Portanto,

$$y' = 3^u \cdot \ln 3 \cdot u'$$

$$= 3^{2x^2 + 3x - 1} \cdot \ln 3 \cdot (4x + 3).$$

(*ii*) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}}$.

Temos $y = \left(\frac{1}{2}\right)^u$, onde $u = \sqrt{x}$. Assim,

$$y' = \left(\frac{1}{2}\right)^u \cdot \ln \frac{1}{2} \cdot u'$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}} \cdot \ln \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(*iii*) $y = e^{\frac{x+1}{x-1}}$.

Fazendo $y = e^u$ com $u = \dfrac{x+1}{x-1}$, temos

$$y' = e^u \cdot u'$$

$$= e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{(x-1) \cdot 1 - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2}$$

$$= e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2}.$$

(iv) $y = e^{x \cdot \ln x}$.

Neste caso fazemos $y = e^u$, onde $u = x \cdot \ln x$.

Então,

$$
\begin{aligned}
y' &= e^u \cdot u' \\
&= e^{x \cdot \ln x} \cdot (x \ln x)' \\
&= e^{x \cdot \ln x} \left[x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot 1 \right] \\
&= e^{x \cdot \ln x} (1 + \ln x).
\end{aligned}
$$

(v) $y = \log_2 (3x^2 + 7x - 1)$.

Temos $y = \log_2 u$, onde $u = 3x^2 + 7x - 1$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{u'}{u} \cdot \log_2 e \\
&= \frac{6x + 7}{3x^2 + 7x - 1} \cdot \log_2 e .
\end{aligned}
$$

(vi) $y = \ln \left(\dfrac{e^x}{x + 1} \right)$.

Temos $y = \ln u$, onde $u = \dfrac{e^x}{x + 1}$. Logo,

$$
y' = \frac{u'}{u}
$$

$$= \frac{\dfrac{(x+1)e^x - e^x \cdot 1}{(x+1)^2}}{\dfrac{e^x}{x+1}}$$

$$= \frac{x}{x+1}.$$

(*vii*) $y = (x^2 + 1)^{2x-1}$.

Temos $y = u^v$, onde $u = x^2 + 1 > 0$ e $v = 2x - 1$. Assim,

$$\begin{aligned} y' &= (2x-1)\,(x^2+1)^{2x-1-1} \cdot (x^2+1)' + (x^2+1)^{2x-1} \cdot \ln(x^2+1) \cdot (2x-1)' \\ &= (2x-1)\,(x^2+1)^{2x-2} \cdot 2x + (x^2+1)^{2x-1} \cdot \ln(x^2+1) \cdot 2. \end{aligned}$$

Derivadas das funções trigonométricas

4.14.5 Proposição (Derivada da função seno). Se $y = \text{sen}\, x$ então $y' = \cos x$.

Prova. Seja $y = \text{sen}\, x$. Aplicando a definição 4.3, temos

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}\,(x + \Delta x) - \text{sen}\, x}{\Delta x}.$$

Para desenvolvermos o limite aplicaremos a fórmula trigonométrica:

$$\text{sen}\, p - \text{sen}\, q = 2\, \text{sen}\, \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2}.$$

Então,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\, \text{sen}\, \dfrac{x + \Delta x - x}{2} \cdot \cos \dfrac{x + \Delta x + x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \frac{2x + \Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{2 \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{2 \cdot \frac{\Delta x}{2}} \right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos \left(\frac{2x + \Delta x}{2} \right)$$

$$= 1 \cdot \cos x$$

$$= \cos x.$$

4.14.6 Proposição (Derivada da função cosseno). Se $y = \cos x$, então $y' = -\operatorname{sen} x$.

Prova. Seja $y = \cos x$. Aplicando a definição 4.3, temos

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos (x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}.$$

Aplicaremos a fórmula trigonométrica:

$$\cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen} \frac{p + q}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{p - q}{2}.$$

Então,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2 \operatorname{sen} \frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{x + \Delta x - x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(-2 \operatorname{sen} \frac{2x + \Delta x}{2} \right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x/2}{2 \cdot \frac{\Delta x}{2}}$$

$$= \quad -2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{2} \cdot 1$$

$$= \quad -\operatorname{sen} x.$$

4.14.7 Derivadas das demais funções trigonométricas.

Como as demais funções trigonométricas são definidas a partir do seno e cosseno, podemos usar as regras de derivação para encontrar suas derivadas.

Por exemplo,

se $\quad y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad$ então $\quad y' = \sec^2 x$.

De fato, usando a regra do quociente, obtemos

$$y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \ (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \sec^2 x.$$

Similarmente, encontramos:

Se $\quad y = \operatorname{cotg} x \quad$ então $\quad y' = -\operatorname{cosec}^2 x$;

se $\quad y = \sec x \quad$ então $\quad y' = \sec x \cdot \operatorname{tg} x \quad$ e

se $\quad y = \operatorname{cosec} x \quad$ então $\quad y' = -\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x$.

Usando a regra da cadeia, obtemos as fórmulas gerais. Acrescentamos os seguintes itens na *tabela de derivadas*.

(*13*) $y = \text{sen } u \quad \Rightarrow \quad y' = \cos u \cdot u'$

(*14*) $y = \cos u \quad \Rightarrow \quad y' = -\text{ sen } u \cdot u'$

(*15*) $y = \text{tg } u \quad \Rightarrow \quad y' = \sec^2 u \cdot u'$

(*16*) $y = \text{cotg } u \quad \Rightarrow \quad y' = -\text{ cosec}^2\, u \cdot u'$

(*17*) $y = \sec u \quad \Rightarrow \quad y' = \sec u \cdot \text{tg } u \cdot u'$

(*18*) $y = \text{cosec } u \quad \Rightarrow \quad y' = -\text{ cosec } u \cdot \text{cotg } u \cdot u'$.

4.14.8 Exemplos.

Determinar a derivada das seguintes funções:

(*i*)

$$\begin{aligned} y &= \text{sen } (x^2). \\ y &= \text{sen } u,\ u = x^2. \\ y' &= (\cos u)\, u' \\ &= [\cos (x^2)] \cdot 2x \\ &= 2x \cos (x^2). \end{aligned}$$

(*ii*)

$$\begin{aligned} y &= \cos (1/x). \\ y &= \cos u,\ u = (1/x). \\ y' &= (-\text{ sen } u) \cdot u' \\ &= [-\text{ sen } (1/x)] \cdot -1/x^2 \\ &= \frac{1}{x^2} \text{ sen } (1/x)\ . \end{aligned}$$

$(iii)\quad y = 3\,\text{tg}\,\sqrt{x} + \text{cotg}\,3x\,.$

$$y' = (3\,\text{tg}\,\sqrt{x})' + (\text{cotg}\,3x)'$$

$$= 3 \cdot \sec^2\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})' + (-\text{cosec}^2\,3x) \cdot (3x)'$$

$$= 3\sec^2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - (\text{cosec}^2\,3x)\,3\,.$$

$(iv)\quad y = \dfrac{\cos x}{1 + \text{cotg}\,x}\,.$

$$y' = \frac{(1 + \text{cotg}\,x)(\cos x)' - \cos x\,(1 + \text{cotg}\,x)'}{(1 + \text{cotg}\,x)^2}$$

$$= \frac{(1 + \text{cotg}\,x)(-\text{sen}\,x) - \cos x\,(-\text{cosec}^2\,x)}{(1 + \text{cotg}\,x)^2}$$

$$= \frac{-\,\text{sen}\,x - \text{sen}\,x\,\text{cotg}\,x + \cos x\,\text{cosec}^2\,x}{(1 + \text{cotg}\,x)^2}\,.$$

$(v)\quad y = \sec\,(x^2 + 3x + 7).$

$$y = \sec u,\ u = x^2 + 3x + 7.$$

$$y' = \sec u \cdot \text{tg}\,u \cdot u'$$

$$= [\sec\,(x^2 + 3x + 7) \cdot \text{tg}\,(x^2 + 3x + 7)] \cdot (2x + 3)$$

$$= (2x + 3)\sec\,(x^2 + 3x + 7) \cdot \text{tg}\,(x^2 + 3x + 7).$$

$(vi)\quad y = \text{cosec}\left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right).$

$$y = \text{cosec}\,u\,, \quad u = \frac{x + 1}{x - 1}\,.$$

$$y' = -\operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{cotg} u \cdot u'$$

$$= \left[-\operatorname{cosec}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \operatorname{cotg}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right] \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2}{(x-1)^2} \operatorname{cosec}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \operatorname{cotg}\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

Derivadas das Funções Trigonométricas Inversas

4.14.9 Proposição (Derivada da função arco seno). Seja $f: [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ definida por $f(x) = \text{arc sen } x$. Então $y = f(x)$ é derivável em $(-1, 1)$ e $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Prova. Sabemos que

$$y = \text{arc sen } x \Leftrightarrow x = \text{sen } y \text{ , } y \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Como $(\text{sen } y)'$ existe e é diferente de zero para qualquer $y \in (-\pi/2, \pi/2)$, aplicando o teorema 4.13, vem

$$y' = \frac{1}{(\text{sen } y)'} = \frac{1}{\cos y}. \qquad (1)$$

Como para $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ temos $\cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y}$, substituindo em (1), vem $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2 y}}$. Como $\text{sen } y = x$ temos $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, para $x \in (-1, 1)$.

4.14.10 Proposição (Derivada da função arco cosseno). Seja $f: [-1, 1] \to [0, \pi]$ definida por $f(x) = \text{arc cos } x$. Então $y = f(x)$ é derivável em $(-1, 1)$ e $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Prova. Usando a relação

$$\text{arc cos}\, x = \frac{\pi}{2} - \text{arc sen}\, x \quad \text{e a proposição 4.14.9, obtemos}$$

$$y' = \left(\frac{\pi}{2} - \text{arc sen}\, x\right)'$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}, \text{ para } x \in (-1, 1).$$

4.14.11 Proposição (Derivada da função arco tangente). Seja $f: \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ definida por $f(x) = \text{arc tg}\, x$. Então $y = f(x)$ é derivável e $y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

Prova. Sabemos que

$$y = \text{arc tg}\, x \Leftrightarrow x = \text{tg}\, y, \; y \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Como $(\text{tg}\, y)'$ existe e é diferente de zero para qualquer $y \in (-\pi/2, \pi/2)$, aplicando o teorema 4.13, vem

$$y' = \frac{1}{(\text{tg}\, y)'} = \frac{1}{\sec^2 y}.$$

Como $\sec^2 y = 1 + \text{tg}^2 y$, obtemos

$$y' = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 y}.$$

Substituindo tg y por x, temos

$$y' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

4.14.12 Derivadas das Demais Funções Trigonométricas Inversas. As demais funções trigonométricas inversas possuem derivadas dadas por:

(*i*) Se $y = \text{arc cotg } x$ então $y' = \dfrac{-1}{1 + x^2}$.

(*ii*) Se $y = \text{arc sec } x$, $|x| \geq 1$, então $y' = \dfrac{1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}}$, $|x| > 1$.

(*iii*) Se $y = \text{arc cosec } x$, $|x| \geq 1$, então $y' = \dfrac{-1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}}$, $|x| > 1$.

A implicação (*i*) pode facilmente ser verificada se usarmos a relação $\text{arc cotg}\, x = \dfrac{\pi}{2} - \text{arc tg}\, x$ e a proposição 4.14.11.

Provaremos a implicação (*ii*).

Seja $y = \text{arc sec } x = \text{arc cos } (1/x)$ para $|x| \geq 1$. Então $y' = [\text{arc cos } (1/x)]'$.

Usando a proposição 4.14.10 e a regra da Cadeia, temos

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - (1/x)^2}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x^2}}} \cdot \frac{-1}{x^2}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}}{\sqrt{x^2}}$$

$$= \frac{|x|}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$= \frac{1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}}, \qquad \text{onde } |x| > 1.$$

Acrescentamos os seguintes itens na *tabela de derivadas:*

(*19*) $y = \text{arc sen } u \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$

(*20*) $y = \text{arc cos } u \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}$

(*21*) $y = \text{arc tg } u \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{u'}{1 + u^2}$

(*22*) $y = \text{arc cotg } u \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{-u'}{1 + u^2}$

(*23*) $\underset{|u| \geq 1}{y = \text{arc sec } u} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{u'}{|u| \sqrt{u^2 - 1}}, \quad |u| > 1$

(*24*) $\underset{|u| \geq 1}{y = \text{arc cosec } u} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{-u'}{|u| \sqrt{u^2 - 1}}, \quad |u| > 1.$

4.14.13 Exemplos. Encontre a derivada das seguintes funções:

(*i*) $y = \text{arc sen } (x + 1).$

$y = \text{arc sen } u, \ u = x + 1.$

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - (x + 1)^2}}.$$

(*ii*) $y = \text{arc tg} \left(\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2} \right).$

$$y = \text{arc tg } u \ , \quad u = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

$$y' = \frac{u'}{1 + u^2}$$

$$y' = \frac{\dfrac{(1 + x^2) \cdot (-2x) - (1 - x^2) \cdot 2x}{(1 + x^2)^2}}{1 + \left(\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)^2}$$

$$y' = \frac{-2x}{1 + x^4}.$$

4.14.14 Derivadas das funções hiperbólicas.

Como as funções hiperbólicas são definidas em termos da função exponencial, podemos facilmente determinar suas derivadas, usando as regras de derivação já estabelecidas.

Por exemplo, se $y = \operatorname{senh} x$, então

$$y' = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]'$$

$$= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})'$$

$$= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$= \cosh x.$$

Similarmente, obtemos as derivadas das demais funções hiperbólicas.

Podemos acrescentar na tabela de derivação as seguintes fórmulas.

(25) $y = \operatorname{senh} u \quad \Rightarrow \quad y' = \cosh u \cdot u'$

(26) $y = \cosh u \quad \Rightarrow \quad y' = \operatorname{senh} u \cdot u'$

(*27*) $y = \text{tgh } u \Rightarrow y' = \text{sech}^2 u \cdot u'$

(*28*) $y = \text{cotgh } u \Rightarrow y' = -\text{cosech}^2 u \cdot u'$

(*29*) $y = \text{sech } u \Rightarrow y' = -\text{sech } u \cdot \text{tgh } u \cdot u'$

(*30*) $y = \text{cosech } u \Rightarrow y' = -\text{cosech } u \cdot \text{cotgh } u \cdot u'$.

4.14.15 Exemplos. Determinar a derivada das seguintes funções:

(*i*)
$$\begin{aligned} y &= \text{senh } (x^3 + 3). \\ y &= \text{senh } u,\ u = x^3 + 3. \\ y' &= \cosh u \cdot u' \\ &= \cosh (x^3 + 3) \cdot 3x^2. \end{aligned}$$

(*ii*)
$$\begin{aligned} y &= \text{sech } (2x). \\ y &= \text{sech } u,\ u = 2x. \\ y' &= -\text{sech } u \cdot \text{tgh } u \cdot u' \\ &= -\text{sech } (2x) \cdot \text{tgh } (2x) \cdot 2. \end{aligned}$$

(*iii*)
$$\begin{aligned} y &= \ln [\text{tgh } (3x)]. \\ y &= \ln u,\ u = \text{tgh } (3x). \\ y' &= \frac{u'}{u} \\ &= \frac{\text{sech}^2 (3x) \cdot 3}{\text{tgh } (3x)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\dfrac{3}{\cosh^2(3x)}}{\dfrac{\operatorname{senh}(3x)}{\cosh(3x)}}$$

$$= 3\ \operatorname{sech}(3x) \cdot \operatorname{cosech}(3x).$$

$$(iv)\quad y = \operatorname{cotgh}(1 - x^3).$$

$$y = \operatorname{cotgh} u,\ u = 1 - x^3.$$

$$y' = -\operatorname{cosech}^2 u \cdot u'$$

$$= -\operatorname{cosech}^2 (1 - x^3) \cdot (-3x^2)$$

$$= 3x^2 \operatorname{cosech}^2 (1 - x^3).$$

4.14.16 Derivadas das funções hiperbólicas inversas.

Na Seção 2.15.6 vimos que $y = \arg \operatorname{senh} x$ pode ser expresso na forma

$$y = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Assim, fazendo $u = x + \sqrt{x^2 + 1}$ e aplicando a regra da cadeia, obtemos

$$y' = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})'}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \frac{1 + \dfrac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2} \cdot 2x}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Portanto, se $y = \text{arg senh}\, x$ então $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

De maneira similar podem ser obtidas as derivadas das demais funções hiperbólicas.

Apresentamos as fórmulas que completam nossa tabela de derivadas.

(*31*) $y = \text{arg senh}\, u \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$

(*32*) $y = \text{arg cosh}\, u \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{u'}{\sqrt{u^2-1}}, \quad u > 1$

(*33*) $y = \text{arg tgh}\, u \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{u'}{1-u^2}, \quad |u| < 1$

(*34*) $y = \text{arg cotgh}\, u \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{u'}{1-u^2}, \quad |u| > 1$

(*35*) $y = \text{arg sech}\, u \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{-u'}{u\sqrt{1-u^2}}, \quad 0 < u < 1$

(*36*) $y = \text{arg cosech}\, u \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{-u'}{|u|\sqrt{1+u^2}}, \quad u \neq 0.$

4.14.17 Exemplos. Determinar a derivada de cada uma das funções dadas.

(*i*) $y = x^2 \text{ arg cosh}\, x^2$.

Temos,

$$y' = x^2 \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^4 - 1}} + 2x \ \text{arg cosh} \ x^2$$

$$= 2x \left[\frac{x^2}{\sqrt{x^4 - 1}} + \text{arg cosh} \ x^2 \right].$$

(*ii*) $y = \text{arg tgh (sen } 3x).$

$$y' = \frac{(\text{sen } 3x)'}{1 - (\text{sen } 3x)^2}$$

$$= \frac{\cos (3x) \cdot 3}{\cos^2 3x}$$

$$= \frac{3}{\cos 3x}$$

$$= 3 \sec 3x.$$

(*iii*) $y = x \ \text{arg senh} \ x - \sqrt{x^2 + 1}$.

$$y' = x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} + \text{arg senh} \, x - \frac{1}{2} (x^2 + 1)^{-1/2} \cdot 2x$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \text{arg senh} \, x - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \text{arg senh} \ x.$$

4.14.18 Tabela Geral de derivadas.

Reunindo todas as fórmulas obtidas, formamos a tabela de derivadas que apresentamos a seguir. Nesta tabela u e v são funções deriváveis de x e c, α e a são constantes.

(*1*) $y = c \Rightarrow y' = 0$

(*2*) $y = x \Rightarrow y' = 1$

(*3*) $y = c \cdot u \Rightarrow y' = c \cdot u'$

(*4*) $y = u + v \Rightarrow y' = u' + v'$

(*5*) $y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$

(*6*) $y = \dfrac{u}{v} \Rightarrow y' = \dfrac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$

(*7*) $y = u^{\alpha}, (\alpha \neq 0) \Rightarrow y' = \alpha \cdot u^{\alpha - 1} \cdot u'$

(*8*) $y = a^u \; (a > 0, a \neq 1) \Rightarrow y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$

(*9*) $y = e^u \Rightarrow y' = e^u \cdot u'$

(*10*) $y = \log_a u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{u} \log_a e$.

(*11*) $y = \ln u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{u}$

(*12*) $y = \underset{(u > 0)}{u^v} \Rightarrow y' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'$

(*13*) $y = \operatorname{sen} u \Rightarrow y' = \cos u \cdot u'$

(*14*) $y = \cos u \Rightarrow y' = -\operatorname{sen} u \cdot u'$

(*15*) $y = \operatorname{tg} u \Rightarrow y' = \sec^2 u \cdot u'$

(*16*) $y = \operatorname{cotg} u \Rightarrow y' = -\operatorname{cosec}^2 u \cdot u'$

(17) $y = \sec u \Rightarrow y' = \sec u \cdot \text{tg}\, u \cdot u'$

(18) $y = \text{cosec}\, u \Rightarrow y' = -\text{cosec}\, u \cdot \text{cotg}\, u \cdot u'$

(19) $y = \text{arc sen}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$

(20) $y = \text{arc cos}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}$

(21) $y = \text{arc tg}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{1 + u^2}$

(22) $y = \text{arc cotg}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{1 + u^2}$

(23) $y = \text{arc sec}\, u,\ |u| \geq 1 \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{|u|\sqrt{u^2 - 1}},\ |u| > 1$

(24) $y = \text{arc cosec}\, u,\ |u| \geq 1 \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{|u|\sqrt{u^2 - 1}},\ |u| > 1$.

(25) $y = \text{senh}\, u \Rightarrow y' = \cosh u \cdot u'$

(26) $y = \cosh u \Rightarrow y' = \text{senh}\, u \cdot u'$

(27) $y = \text{tgh}\, u \Rightarrow y' = \text{sech}^2\, u \cdot u'$

(28) $y = \text{cotgh}\, u \Rightarrow y' = -\text{cosech}^2\, u \cdot u'$

(29) $y = \text{sech}\, u \Rightarrow y' = -\text{sech}\, u \cdot \text{tgh}\, u \cdot u'$

(30) $y = \text{cosech}\, u \Rightarrow y' = -\text{cosech}\, u \cdot \text{cotgh}\, u \cdot u'$

(31) $y = \text{arg senh}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{\sqrt{u^2 + 1}}$

(32) $y = \text{arg cosh}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{\sqrt{u^2 - 1}},\quad u > 1$

(33) $y = \arg \text{tgh } u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{1 - u^2}$, $|u| < 1$

(34) $y = \arg \text{cotgh } u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{1 - u^2}$, $|u| > 1$

(35) $y = \arg \text{sech } u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{u \sqrt{1 - u^2}}$, $0 < u < 1$

(36) $y = \arg \text{cosech } u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{|u| \sqrt{1 + u^2}}$, $u \neq 0$.

4.15 EXERCÍCIOS

Nos exercícios de 1 a 75 calcular a derivada.

1. $f(x) = 10 (3x^2 + 7x - 3)^{10}$

2. $f(x) = \dfrac{1}{3} (2x^5 + 6x^{-3})^5$

3. $f(x) = \dfrac{1}{a} (bx^2 + ax)^3$

4. $f(x) = (3x^2 + 6x)^{10} - \dfrac{1}{x^2}$

5. $f(t) = (7t^2 + 6t)^7 (3t - 1)^4$

6. $f(x) = (5x - 2)^6 (3x - 1)^3$

7. $f(t) = \left(\dfrac{7t + 1}{2t^2 + 3}\right)^3$

8. $f(x) = (2x - 5)^4 + \dfrac{1}{x + 1} - \sqrt{x}$

9. $f(x) = \sqrt[3]{(3x^2 + 6x - 2)^2}$

10. $f(t) = (4t^2 - 5t + 2)^{-1/3}$

11. $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{3x - 1}}$

12. $f(x) = \dfrac{7x^2}{2 \sqrt[5]{3x + 1}} + \sqrt{3x + 1}$

13. $f(t) = \sqrt{\dfrac{2t + 1}{t - 1}}$

14. $f(x) = 2 e^{3x^2 + 6x + 7}$

15. $f(x) = \frac{1}{3} e^{3-x}$

16. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

17. $f(x) = 2^{3x^2 + 6x}$

18. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\ln 2x}$

19. $f(s) = (7s^2 + 6s - 1)^3 + 2e^{-3s}$

20. $f(t) = \frac{e^{-t^2} + 1}{t}$

21. $f(t) = e^{t/2}(t^2 + 5t)$

22. $f(t) = \frac{\sqrt{e^t - 1}}{\sqrt{e^t + 1}}$

23. $f(x) = \log_2 (2x + 4)$

24. $f(x) = \frac{1}{a}(bx^2 + c) - \ln x$

25. $f(s) = \log_3 \sqrt{s + 1}$

26. $f(x) = \frac{1}{2} \ln (7x^2 - 4)$

27. $f(x) = \ln \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$

28. $f(x) = \ln \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$

29. $f(x) = \frac{a^{3x}}{b^{3x^2 - 6x}}$

30. $f(t) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\sqrt{t}}$

31. $f(t) = (2t + 1)^{t^2 - 1}$

32. $f(x) = (e^{x^2} + 4)^{\sqrt{x}}$

33. $f(s) = \frac{1}{2}(a + bs)^{\ln(a + bs)}$

34. $f(x) = \text{sen}\,(2x + 4)$

35. $f(u) = \cos (\pi/2 - u)$

36. $f(\theta) = 2 \cos (2\,\theta^2 - 3\,\theta + 1)$

37. $f(\theta) = 2 \cos \theta^2 \cdot \text{sen}\, 2\,\theta$

38. $f(\alpha) = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

39. $f(x) = \text{sen}^3 (3x^2 + 6x)$

40. $f(\theta) = \text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta$

41. $f(x) = 3\text{tg}\,(2x + 1) + \sqrt{x}$

42. $f(s) = \text{cotg}^4\,(2s - 3)^2$

43. $f(x) = \dfrac{3\sec^2 x}{x}$

44. $f(x) = \left(\dfrac{1}{\text{sen}\,x}\right)^2$

45. $f(x) = e^{2x}\cos 3x$

46. $f(x) = \dfrac{\text{sen}\,(x + 1)}{e^x}$

47. $f(\theta) = -\text{cosec}^2\,\theta^3$

48. $f(x) = \text{sen}^2\,(x/2)\cos^2\,(x/2)$

49. $f(x) = a\sqrt{\cos bx}$

50. $f(t) = \ln \cos^2 t$

51. $f(u) = (u\,\text{tg}\,u)^2$

52. $f(x) = \log_2\,(3x - \cos 2x)$

53. $f(\theta) = a^{\text{cotg}\,\theta},\ a > 0$

54. $f(t) = e^{2\cos 2t}$

55. $f(x) = (\text{arc sen}\,x)^2$

56. $f(x) = \text{arc cos}\,\dfrac{2x}{3}$

57. $f(t) = t\,\text{arc cos}\,3t$

58. $f(s) = \dfrac{\text{arc sen}\ s/2}{s + 1}$

59. $f(t) = \text{arc cos}\,(\text{sen}\,t)$

60. $f(x) = \text{arc tg}\,\dfrac{1}{1 - x^2}$

61. $f(x) = \text{arc sec}\,\sqrt{x}$

62. $f(x) = \text{senh}\,(2x - 1)$

63. $f(t) = t^2\,\text{arc cosec}\,(2t + 3)$

64. $f(t) = \ln\,[\cosh\,(t^2 - 1)]$

65. $f(x) = \dfrac{\ln\,(\text{sen}\,hx)}{x}$

66. $f(t) = \text{tgh}\,(4t^2 - 3)^2$

67. $f(t) = [\text{cotgh}\,(t + 1)^2\,]^{1/2}$

68. $f(x) = \text{sech}\,[\ln x]$

69. $f(x) = \left[\text{cosech } \dfrac{(3x+1)}{x}\right]^3$

70. $f(x) = (\arg \text{senh } x)^2$

71. $f(x) = x \arg\cosh x - \sqrt{x^2 - 1}$

72. $f(x) = \arg \text{tgh } \dfrac{1}{2} x^2$

73. $f(x) = x \arg \text{cotgh } x^2$

74. $f(x) = (x + 1) \arg \text{sech } 2x$

75. $f(x) = \dfrac{1}{2} [\arg\cosh x^2]^2$

76. Encontrar $f'(x)$.

a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & , x \leq 0 \\ e^{-x} & , x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \ln | 3 - 4x |$

c) $f(x) = e^{|2x-1|}$.

77. Calcular $f'(0)$, se $f(x) = e^{-x} \cos 3x$.

78. Calcular $f'(1)$, se $f(x) = \ln(1 + x) + \text{arc sen } x/2$.

79. Dada $f(x) = e^{-x}$, calcular $f(0) + x f'(0)$.

80. Dada $f(x) = 1 + \cos x$, mostrar que $f(x)$ é par e $f'(x)$ é ímpar.

81. Dada a $f(x) = \text{sen } 2x \cos 3x$, mostrar que $f(x)$ é ímpar e $f'(x)$ é par.

82. Dada a função $f(x) = \dfrac{1}{2} \text{ sen } 2x$, calcular $f'(x)$ e verificar que f e f' são periódicas de mesmo período.

83. Seja $f(x)$ derivável e periódica de período T. Mostrar que f' também é periódica de período T.

84. Mostrar que a função $y = x\, e^{-x}$ satisfaz a equação $xy' = (1 - x)y$.

85. Mostrar que a função $y = x\, e^{-x^2/2}$ satisfaz a equação $xy' = (1 - x^2)y$.

86. Mostrar que a função $y = \dfrac{1}{1 + x + \ln x}$ satisfaz a equação $xy' = y\,(y \ln x - 1)$.

87. Sejam f e g funções tais que $(f_0\, g)\,(x) = x$ para todo x, e $f\,'(x)$ e $g\,'(x)$ existem para todo x.

Mostrar que

$$f\,'(g(x)) = \frac{1}{g\,'(x)}, \text{ sempre que } g'\,(x) \neq 0.$$

88. Obtenha a regra do produto para $(uv)'$ derivando a fórmula

$\ln\,(uv) = \ln u + \ln v$.

89. Provar que:

a) Se $y = \text{cotg}\, x$, então $y' = -\text{cosec}^2\, x$.

b) Se $y = \sec x$, então $y' = \sec x \cdot \text{tg}\, x$.

c) Se $y = \text{arc cotg}\, x$, então $y' = \dfrac{-1}{1 + x^2}$.

d) Se $y = \text{arc cosec}\, x$, $|x| \geq 1$, então $y' = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$, $|x| > 1$.

e) Se $y = \cosh x$, então $y' = \text{senh}\, x$.

f) Se $y = \text{tgh}\, x$, então $y' = \text{sech}^2\, x$.

g) Se $y = \text{sech}\, x$, então $y' = -\text{sech}\, x \cdot \text{tgh}\, x$.

h) Se $y = \arg \operatorname{sech} x$, então $y' = \dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$, $0 < x < 1$.

i) Se $y = \arg \operatorname{cosech} x$, então $y' = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$, $x \neq 0$.

90. Encontrar todos os pontos onde o gráfico de $f(x)$ tem tangente horizontal.

a) $f(x) = \text{sen } 2x$; *b*) $f(x) = 2 \cos x$.

4.16 DERIVADAS SUCESSIVAS

Seja f uma função derivável definida num certo intervalo. A sua derivada f' é também uma função, definida no mesmo intervalo. Podemos, portanto, pensar na derivada da função f'.

4.16.1 Definição. Seja f uma função derivável. Se f' também for derivável, então a sua derivada é chamada *derivada segunda de f* e é representada por $f''(x)$ (lê-se f-duas linhas de x) ou $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ (lê-se *derivada segunda de f* em relação a x).

4.16.2 Exemplos

(*i*) Se $f(x) = 3x^2 + 8x + 1$, então

$f'(x) = 6x + 8$ e

$f''(x) = 6$.

(*ii*) Se $f(x) = \text{tg } x$, então

$f'(x) = \sec^2 x$ e

$$f''(x) = 2\sec x \cdot \sec x \cdot \text{tg } x$$
$$= 2\sec^2 x \cdot \text{tg } x.$$

(*iii*) Se $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, então

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2} \cdot 2x$$

$$= x\,(x^2 + 1)^{-1/2} \quad \text{e}$$

$$f''(x) = x \cdot \frac{-1}{2}(x^2 + 1)^{-3/2} \cdot 2x + (x^2 + 1)^{-1/2} \cdot 1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}.$$

Se f'' é uma função derivável, sua derivada, representada por $f'''(x)$, é chamada *derivada terceira* de $f(x)$.

A derivada de ordem n ou n-ésima derivada de f, representada por $f^{(n)}(x)$, é obtida derivando-se a derivada de ordem $n - 1$ de f.

4.16.3 Exemplos

(*i*) Se $f(x) = 3x^5 + 8x^2$, então

$f'(x) = 15x^4 + 16x$

$f''(x) = 60x^3 + 16$

$f'''(x) = 180x^2$

$f^{iv}(x) = 360x$

$f^{(5)}(x) = 360$

$f^{(6)}(x) = 0$

— — — — — — — — —

— — — — — — — — —

$f^{(n)}(x) = 0$, para $n \geq 6$.

(*ii*) Se $f(x) = e^{x/2}$, então

$$f'(x) = \frac{1}{2}\, e^{x/2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{4}\, e^{x/2}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{8}\, e^{x/2}$$

— — — — — — — — —

— — — — — — — — —

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2^n}\, e^{x/2}.$$

(*iii*) Se $f(x) = \operatorname{sen} x$, então

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{iv}(x) = \operatorname{sen} x$$

— — — — — — — — —

— — — — — — — — —

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{para } n = 1, 5, 9, \ldots \\ -\operatorname{sen} x, & \text{para } n = 2, 6, 10, \ldots \\ -\cos x, & \text{para } n = 3, 7, 11, \ldots \\ \operatorname{sen} x, & \text{para } n = 4, 8, 12, \ldots \end{cases}$$

4.17 DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

4.17.1 Função na forma implícita.

Consideremos a equação

$$F(x, y) = 0. \qquad (1)$$

Dizemos que a função $y = f(x)$ é definida implicitamente pela equação (1), se ao substituirmos y por $f(x)$ em (1), esta equação se transforma numa identidade.

4.17.2 Exemplos

(*i*) A equação $x^2 + \frac{1}{2}y - 1 = 0$ define implicitamente a função $y = 2\,(1 - x^2)$.

De fato, substituindo $y = 2\,(1 - x^2)$ na equação $x^2 + \frac{1}{2}\,y - 1 = 0$, obtemos a identidade $x^2 + \frac{1}{2} \cdot 2(1 - x^2) - 1 = 0$.

(*ii*) A equação $x^2 + y^2 = 4$ define, implicitamente, uma infinidade de funções.

De fato, resolvendo a equação para y como função de x, temos

$$y = \pm\sqrt{4 - x^2}.$$

Duas funções na forma implícita são obtidas naturalmente:

$$y = +\sqrt{4 - x^2} \qquad \text{e} \qquad y = -\sqrt{4 - x^2}.$$

Os gráficos dessas funções são, respectivamente, a semicircunferência superior e inferior da circunferência de centro na origem e raio 2 (ver Figura 4.8).

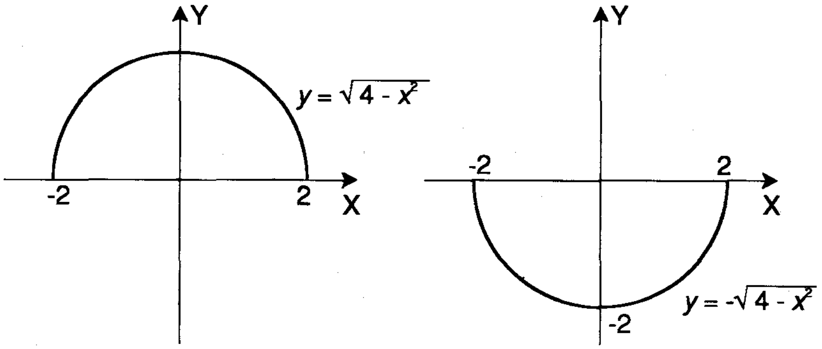


Figura 4-8

Podemos obter outras funções implícitas da equação $x^2 + y^2 = 4$. Se tomamos um número real c qualquer entre -2 e 2, podemos definir a função

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{4 - x^2}, & \text{para } x \geq c \\ -\sqrt{4 - x^2}, & \text{para } x < c\,. \end{cases}$$

A função $h(x)$ é definida implicitamente pela equação $x^2 + y^2 = 4$, pois $x^2 + [\,h\,(x)\,]^2 = 4$ para todo x no domínio de h.

Podemos ver o gráfico da função h na Figura 4.9. Observamos que esta função não é contínua no ponto c e portanto não é derivável.

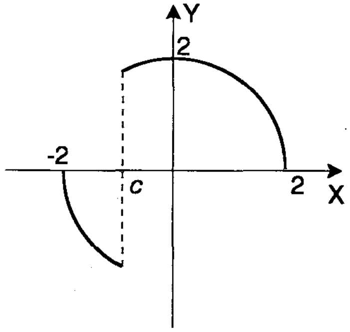


Figura 4-9

Atribuindo diferentes valores a c, podemos obter tantas funções quantas queiramos. Assim, a equação $x^2 + y^2 = 4$, define implicitamente uma infinidade de funções.

Nem sempre é possível encontrar a forma explícita de uma função definida implicitamente. Por exemplo, como explicitar uma função $y = f(x)$ definida pela equação

$y^4 + 3xy + 2 \ln y = 0$?

O método da derivação implícita permite encontrar a derivada de uma função assim definida, sem a necessidade de explicitá-la.

4.17.3 A Derivada de uma função na forma implícita.

Suponhamos que $F(x, y) = 0$ define implicitamente uma função derivável $y = f(x)$. Os exemplos que seguem mostram que usando a regra da cadeia, podemos determinar y' sem explicitar y.

Exemplos.

(*i*) Sabendo que $y = f(x)$ é uma função derivável definida implicitamente pela equação $x^2 + y^2 = 4$, determinar y'.

Como a equação $x^2 + y^2 = 4$ define $y = f(x)$ implicitamente, podemos considerá-la uma identidade válida para todo x no domínio de f.

Derivando ambos os membros desta identidade em relação a x, temos

$$(x^2 + y^2)' = (4)'$$

ou,

$$(x^2)' + (y^2)' = 0.$$

Como $y = f(x)$, usando a regra da cadeia, vem

$$2x + 2y\, y' = 0.$$

Isolando y', temos

$$y' = \frac{-x}{y}.$$

Observamos que, neste exemplo, foi usado o fato de que $y = f(x)$ é uma função *derivável* definida implicitamente. Esse resultado não é válido para a função $h(x)$, representada graficamente na Figura 4.9. De fato, embora esta função também seja definida implicitamente pela equação $x^2 + y^2 = 4$, ela não é contínua no ponto $x = c$ e portanto, não é derivável neste ponto.

(*ii*) Sabendo que $y = f(x)$ é definida pela equação $xy^2 + 2y^3 = x - 2y$, determinar y'.

Sabemos que a equação $xy^2 + 2y^3 = x - 2y$ é uma identidade quando substituimos y por $f\ (x)$. Portanto, em todos os pontos onde $y = f(x)$ é derivável, temos as seguintes igualdades:

$$(xy^2 + 2y^3)' = (x - 2y)'$$

$$(xy^2)' + (2y^3)' = (x)' - (2y)'$$

$$x \cdot 2y\, y' + y^2 + 6y^2\, y' = 1 - 2y'.$$

Isolando y' na última igualdade, temos

$$y' = \frac{1 - y^2}{2xy + 6y^2 + 2}.$$

(*iii*) Se $y = f(x)$ é definida por $x^2y^2 + x \operatorname{sen} y = 0$, determinar y'.

Lembrando que $y = f(x)$ e derivando em relação a x com o auxílio da regra da cadeia, temos

$$x^2 \cdot 2y \cdot y' + 2xy^2 + x \cos y\, y' + \operatorname{sen} y = 0.$$

Isolando y', vem

$$y' = -\frac{2xy^2 + \operatorname{sen} y}{2x^2y + x\cos y}.$$

(*iv*) Determinar a equação da reta tangente à curva $x^2 + \frac{1}{2}y - 1 = 0$ no ponto $(-1, 0)$.

Derivando implicitamente em relação a x, temos

$$2x + \frac{1}{2}y' = 0$$

Portanto, $y' = -4x$. No ponto $x = -1$, $y' = 4$.

A equação da reta tangente à curva no ponto $(-1, 0)$ é dada por

$y - 0 = 4(x + 1)$, ou seja,

$y = 4x + 4$.

4.18 DERIVADA DE UMA FUNÇÃO NA FORMA PARAMÉTRICA

4.18.1 Função na Forma Paramétrica. Sejam

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (1)$$

duas funções da mesma variável real t, $t \in [a, b]$. Então, a cada valor de t correspondem dois valores x e y. Considerando estes valores como as coordenadas de um ponto P, podemos dizer que a cada valor de t corresponde um ponto bem determinado do plano xy. Se as funções $x = x(t)$ e $y = y(t)$ são contínuas, quando t varia de a até b, o ponto $P(x(t), y(t))$ descreve uma curva no plano (ver Figura 4.10). As equações (1) são chamadas equações paramétricas da curva e t é chamado parâmetro.

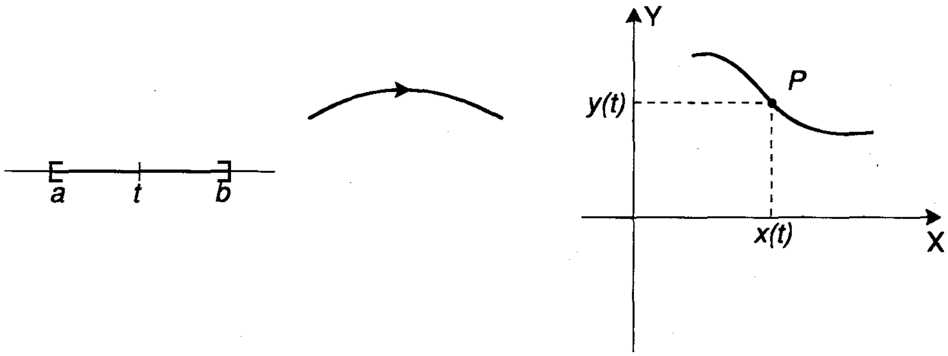


Figura 4-10

Vamos supor agora, que a função $x = x(t)$ admite uma função inversa $t = t(x)$. Neste caso, podemos escrever

$$y = y\,[t(x)\,]$$

e dizemos que as equações (1) definem y como função de x na forma paramétrica.

Eliminando o parâmetro t nas equações (1), podemos obter a função $y = y(x)$ na forma analítica usual.

Muitas curvas importantes costumam ser representadas na forma paramétrica. Em geral, as equações paramétricas são úteis porque, em diversas situações, elas simplificam os cálculos. Elas também são muito usadas na Física, para descrever o movimento de uma partícula. A seguir, apresentamos as equações paramétricas de algumas curvas e damos exemplos de algumas funções definidas na forma paramétrica.

4.18.2 Exemplos

(*i*) As equações $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 4t + 3 \end{cases}$

definem uma função $y(x)$ na forma paramétrica.

De fato, a função $x = 2t + 1$ é inversível sendo que sua inversa é dada por $t = \frac{1}{2}(x - 1)$. Substituindo este valor na equação $y = 4t + 3$, obtemos a equação cartesiana da função $y(x)$, que é dada por

$$\begin{aligned} y &= 4\left[\frac{1}{2}(x - 1)\right] + 3 \\ &= 2x + 1. \end{aligned}$$

(*ii*) As equações $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \operatorname{sen} t \ , \ t \in [0, 2\pi], \end{cases}$ (2)

onde a é uma constante positiva, representam uma circunferência de centro na origem e raio a.

Na Figura 4.11, visualizamos o parâmetro t, $0 \leq t \leq 2\pi$, que representa o ângulo formado pelo eixo positivo dos x e o segmento de reta que une o ponto P à origem.

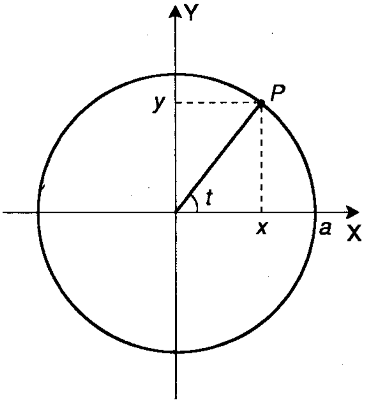


Figura 4-11

Para obter a equação cartesiana, devemos eliminar o parâmetro t.

Elevando ao quadrado cada uma das equações em (2) e adicionando-as, obtemos

$$\begin{aligned} x^2 &= a^2 \cos^2 t \\ y^2 &= a^2 \operatorname{sen}^2 t \\ \hline x^2 + y^2 &= a^2 \cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t \\ &= a^2 \end{aligned}$$

ou seja, $x^2 + y^2 = a^2$.

Observamos que, neste exemplo, não temos uma função $y(x)$ na forma paramétrica, porque a função $x = a \cos t$ não é inversível no intervalo $[0, 2\pi]$. No entanto, podemos obter uma ou mais funções $y = y(x)$ na forma paramétrica, restringindo convenientemente o domínio.

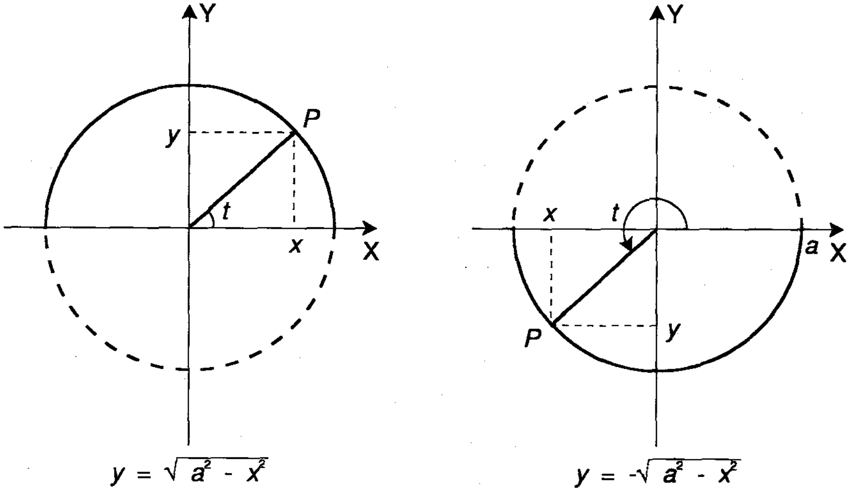


Figura 4-12

Por exemplo, as equações

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \operatorname{sen} t, \ t \in [0, \pi] \end{cases}$$

definem, na forma paramétrica, a função $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ e as equações

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \operatorname{sen} t \ , \ t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

definem a função $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$ (ver Figura 4.12).

(*iii*) As equações

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \operatorname{sen} t \ , \ t \in [0, 2\pi] \ , \end{cases} \tag{3}$$

onde a e b são constantes positivas, representam uma elipse de centro na origem e semi-eixos a e b, como mostra a Figura 4.13(a).

Neste caso, o parâmetro t também representa um ângulo e pode ser visualizado na Figura 4.13(b).

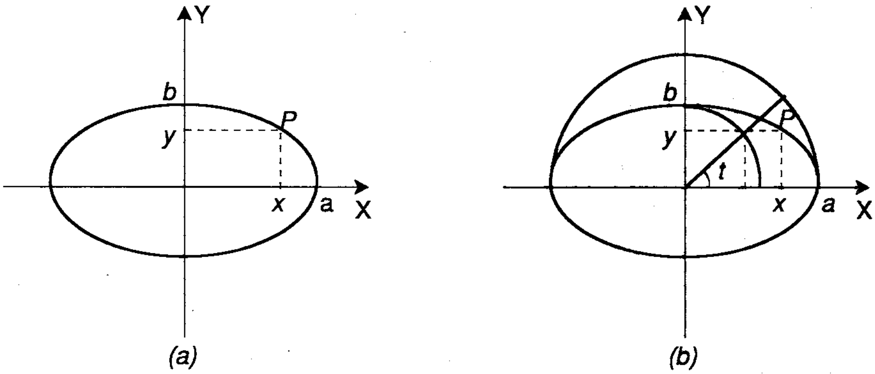


Figura 4-13

Para obter a equação cartesiana da elipse dada, devemos eliminar o parâmetro t.

Multiplicando a primeira equação de (3) por b e a segunda equação por a, obtemos

$$bx = ab \cos t$$

$$ay = ab \operatorname{sen} t.$$

Elevando cada uma dessas equações ao quadrado e adicionando-as, vem

$$\begin{aligned} b^2x^2 &= a^2b^2\cos^2 t \\ a^2y^2 &= a^2b^2\operatorname{sen}^2 t \\ \hline b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) \\ &= a^2b^2 \end{aligned}$$

ou, de forma equivalente,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Como no exemplo anterior, restringindo convenientemente o domínio, podemos definir uma ou mais funções $y(x)$ na forma paramétrica.

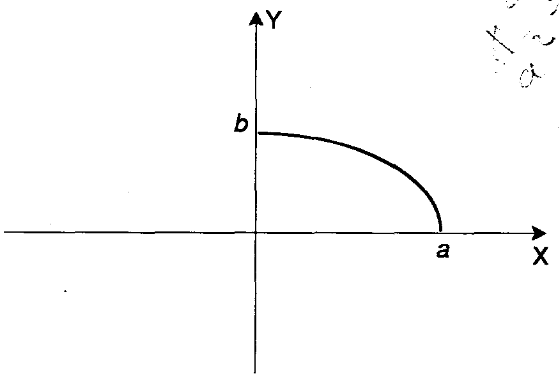


Figura 4-14

Por exemplo, as equações

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \operatorname{sen} t \ , \ t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2} \right], \end{cases}$$

definem, na forma paramétrica, a função $y(x)$ que está representada na Figura 4.14.

(iv) As equações

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \operatorname{sen}^3 t \ , \ 0 \leq t \leq 2\pi, \end{cases} \qquad (4)$$

onde a é uma constante positiva, representam a curva vista na Figura 4.15(a).

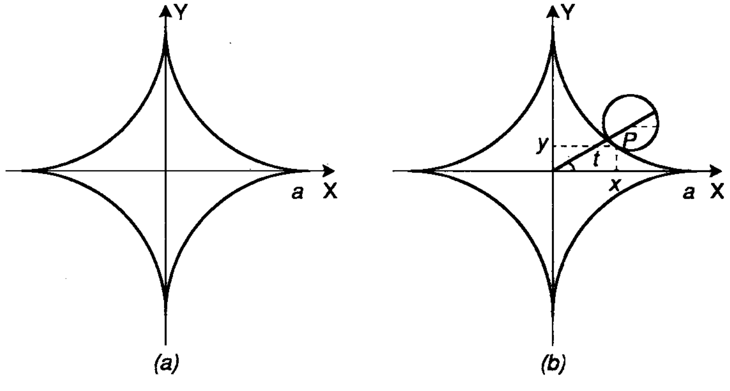


Figura 4-15

Esta curva é chamada astróide ou hipociclóide de 4 cúspides e pode ser definida como a trajetória descrita por um ponto fixo P de uma circunferência de raio $a/4$, quando esta gira, sem escorregar, dentro de uma circunferência fixa de raio a.

Na Figura 4.15(b), ilustramos o significado geométrico do parâmetro t.

Para obter a equação cartesiana da curva, procedemos de forma análoga aos exemplos anteriores. Elevando cada equação de (4) à potência 2/3 e adicionando-as, obtemos

$$\begin{aligned} x^{2/3} &= a^{2/3}\cos^2 t \\ y^{2/3} &= a^{2/3}\,\text{sen}^2\, t \\ \hline x^{2/3} + y^{2/3} &= a^{2/3}(\cos^2 t + \text{sen}^2\, t) \end{aligned}$$

ou, de forma equivalente,

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

Observamos que as equações (4) não definem uma função $y(x)$ na forma paramétrica, porque $x = a\cos^3 t$ não é inversível no intervalo $[0, 2\pi]$. Portanto, se queremos definir uma função $y(x)$ na forma paramétrica, devemos tomar o cuidado de restringir convenientemente o domínio.

4.18.3 Derivada de uma Função na Forma Paramétrica.

Seja y uma função de x definida pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\ , \ t \in [a,b]\,. \end{cases} \tag{5}$$

Suponhamos que as funções $y = y(t)$, $x = x(t)$ e sua inversa $t = t(x)$ são deriváveis.

Podemos ver a função $y = y(x)$, definida pelas equações (5), como uma função composta

$$y = y\,[t(x)]$$

e aplicar a regra da cadeia. Temos, então

$$\frac{dy}{dx} = y'(t)\cdot t'(x)\,. \tag{6}$$

Como $x = x(t)$ e sua inversa $t = t(x)$ são deriváveis, pelo teorema 4.13, vem

$$t'(x) = \frac{1}{x'(t)} \cdot \tag{7}$$

Substituindo (7) em (6), obtemos

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} .}$$

Observamos que esta fórmula nos permite calcular a derivada $\frac{dy}{dx}$ sem conhecer explicitamente y como função de x.

4.18.4 Exemplos

(*i*) Calcular a derivada $\frac{dy}{dx}$ da função $y(x)$ definida na forma paramétrica pelas equações:

(*a*) $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 4t + 3 \ ; \end{cases}$ (*b*) $\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 9t^2 - 6t \ . \end{cases}$

Solução.

(*a*) Temos,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{4}{2} = 2 \ .$$

(*b*) Temos,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{18t - 6}{3} = 6t - 2 \ . \tag{8}$$

Se quisermos o valor da derivada $\dfrac{dy}{dx}$ em função de x, devemos determinar $t = t(x)$ e substituir em (8). Temos,

$$x = 3t - 1 \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{1}{3}(x+1)\ .$$

Substituindo em (8), vem

$$\frac{dy}{dx} = 6 \cdot \frac{1}{3}(x+1) - 2$$

$$= 2x.$$

(ii) Determinar a derivada $\dfrac{dy}{dx}$ da função $y(x)$ definida na forma paramétrica pelas equações

$$\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4\,\text{sen}^3 t\ , \qquad 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}\cdot \end{cases}$$

Temos,

$$x'(t) = -12\cos^2 t\ \text{sen}\ t$$

$$y'(t) = 12\,\text{sen}^2 t\cos t.$$

Portanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{12\,\text{sen}^2 t\cos t}{-12\cos^2 t\ \text{sen}\, t} = -\frac{\text{sen}\, t}{\cos t} = -\ \text{tg}\ t\ .$$

Observamos que este resultado só é válido para os pontos onde $x'(t) \neq 0$, ou seja, para $t \neq 0$ e $t \neq \frac{\pi}{2}$.

(*iii*) Determinar a equação da reta tangente à circunferência $x^2 + y^2 = 4$, no ponto $P(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Solução. Vamos usar a função $y(x)$ definida na forma paramétrica pelas equações

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\,\text{sen}\, t, \qquad t \in [0, \pi], \end{cases}$$

como vimos no Exemplo 4.18.2(*ii*).

Vamos agora, calcular a inclinação da reta tangente no ponto P, ou seja, vamos calcular o valor da derivada $\frac{dy}{dx}$ no ponto P. Temos,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2\cos t}{-2\,\text{sen}\, t} = -\text{cotg}\, t.$$

Precisamos determinar o valor do parâmetro t que corresponde ao ponto P. Temos,

$$\begin{cases} \sqrt{2} = 2\cos t \\ \sqrt{2} = 2\,\text{sen}\, t, \end{cases}$$

e portanto $t = \frac{\pi}{4}$.

A equação da reta tangente à curva no ponto $P(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, é dada por

$$y - \sqrt{2} = -1(x - \sqrt{2}),$$

ou seja,

$$y = -x + 2\sqrt{2}\,.$$

4.19 DIFERENCIAL

4.19.1 Acréscimos. Seja $y = f(x)$ uma função. Podemos sempre considerar uma variação da variável independente x. Se x varia de x_1 a x_2, definimos o *acréscimo de x*, denotado por Δx, como

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

A variação de x origina uma correspondente variação de y, denotada por Δy, dada por

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) \qquad \text{ou,}$$

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) \quad \text{(ver Figura 4.16).}$$

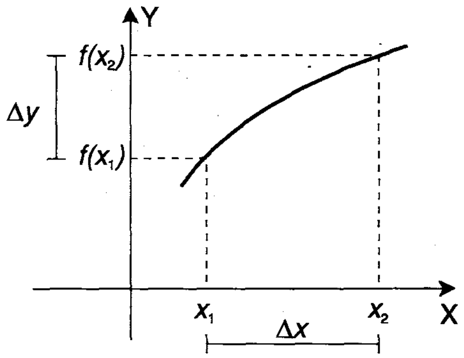


Figura 4-16

4.19.2 Diferencial. Sejam $y = f(x)$ uma função derivável e Δx um acréscimo de x. Definimos:

(*a*) a diferencial da variável independente x, denotada por dx, como

$dx = \Delta x$;

(*b*) a diferencial da variável dependente y, denotada por dy, como

$dy = f'(x) \cdot \Delta x$.

De acordo com a definição anterior, podemos escrever $dy = f'(x) \cdot dx$ ou

$\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$.

Assim, a notação $\dfrac{dy}{dx}$, já usada para $f'(x)$, pode agora ser considerada um quociente entre duas diferenciais.

4.19.3 Interpretação Geométrica. Consideremos a Figura 4.17, que representa o gráfico de uma função $y = f(x)$ derivável.

O acréscimo Δx que define a diferencial dx está geometricamente representado pela medida do segmento $P\,M$ $[P(x_1, f(x_1))$ e $M(x_2, f(x_1))]$ (ver Figura 4.17).

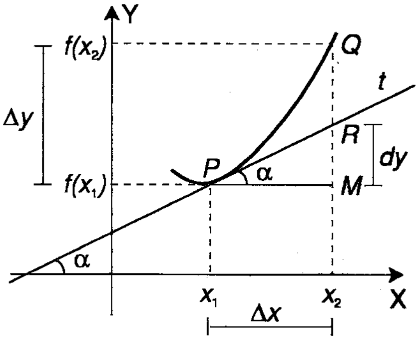


Figura 4-17

O acréscimo Δy está representado pela medida do segmento $M\,Q$ [$Q\ (x_2, f(x_2)$].

A reta t é tangente à curva no ponto P. Esta reta corta a reta $x = x_2$ no ponto R, formando o triângulo retângulo $P\,M\,R$. A inclinação desta reta t é dada por $f'(x_1)$ ou tg α. Observando o triângulo $P\,M\,R$, escrevemos

$$f'(x_1) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{MR}}{\overline{PM}},$$

onde $\overline{MR}$ e $\overline{PM}$ são respectivamente as medidas dos segmentos MR e PM. Usando o fato de que $f'(x_1) = \dfrac{dy}{dx}$, concluímos que $dy \doteq \overline{MR}$, já que $\overline{PM} = dx$.

Observamos que, quando Δx torna-se muito pequeno, o mesmo ocorre com a diferença $\Delta y - dy$. Usamos esse fato em exemplos práticos, considerando $\Delta y \cong dy$ (Δy aproximadamente igual a dy), desde que o Δx considerado seja um valor pequeno.

4.19.4 Exemplos

(*i*) Se $y = 2x^2 - 6x + 5$, calcule o acréscimo Δy para $x = 3$ e $\Delta x = 0{,}01$.

Usando a definição de Δy, escrevemos

$$\begin{aligned}
\Delta y &= f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) \\
&= f(3 + 0{,}01) - f(3) \\
&= f(3{,}01) - f(3) \\
&= [2 \cdot (3{,}01)^2 - 6 \cdot 3{,}01 + 5] - [2 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 5] \\
&= 5{,}0602 - 5 \\
&= 0{,}0602.
\end{aligned}$$

(*ii*) Se $y = 6x^2 - 4$, calcule Δy e dy para $x = 2$ e $\Delta x = 0{,}001$.

Usando a definição de Δy, temos

$$\begin{aligned}
\Delta y &= f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) \\
&= f(2 + 0{,}001) - f(2)
\end{aligned}$$

$$= [6 \cdot (2{,}001)^2 - 4] - [6 \cdot 2^2 - 4]$$
$$= 20{,}024006 - 20$$
$$= 0{,}024006.$$

Usando a definição de dy, temos

$$\begin{aligned} dy &= f'(x) \cdot \Delta x \\ &= 12x \cdot \Delta x \\ &= 12 \cdot 2 \cdot 0{,}001 \\ &= 0{,}024. \end{aligned}$$

Observamos que a diferença $\Delta y - dy = 0{,}000006$ seria menor caso usássemos um valor menor que 0,001 para Δx.

(*iii*) Calcule um valor aproximado para $\sqrt[3]{65{,}5}$ usando diferenciais.

Seja $y = f(x)$ a função definida por $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Escrevemos,

$$y + \Delta y = \sqrt[3]{x + \Delta x} \quad \text{e} \quad dy = \frac{1}{3x^{2/3}}\, dx .$$

Fazemos $x = 64$ e $\Delta x = 1{,}5$, isto porque 64 é o cubo perfeito mais próximo de 65,5.

Portanto,

$$x + \Delta x = 65{,}5 \ , \ dx = \Delta x = 1{,}5 \ \text{ e}$$

$$dy = \frac{1}{3(64)^{2/3}} \cdot 1{,}5 = \frac{1{,}5}{3 \cdot 16} = 0{,}03125 .$$

Então,

$$\sqrt[3]{65{,}5} = \sqrt[3]{64 + 1{,}5} = \sqrt[3]{x + \Delta x} = y + \Delta y \ .$$

Fazendo $\Delta y \cong dy$, obtemos finalmente que

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{65{,}5} \cong y + \Delta y &= 4 + 0{,}03125 \\ &= 4{,}03125.\end{aligned}$$

(*iv*) Obtenha um valor aproximado para o volume de uma fina coroa cilíndrica de altura 12 m, raio interior 7 m e espessura 0,05 m. Qual o erro decorrente se resolvermos usando diferenciais?

A Figura 4.18 representa o sólido de altura h, raio interior r e espessura Δr.

O volume V do cilindro interior é dado por

$$\begin{aligned}V &= \pi r^2 \cdot h \\ &= \pi \cdot 7^2 \cdot 12 \\ &= 588\,\pi\,\text{m}^3.\end{aligned}$$

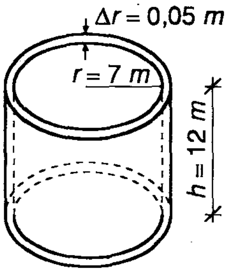


Figura 4-18

Dando um acréscimo Δr o volume da coroa será igual à variação ΔV em V.

Usando diferenciais, temos

$$\begin{aligned} \Delta V \cong dV &= 2\pi\, r\, h\, \Delta r \\ &= 2\pi \cdot 7 \cdot 12 \cdot 0{,}05 \\ &= 8{,}4\, \pi\, \text{m}^3. \end{aligned}$$

O volume exato será

$$\begin{aligned} \Delta V &= \pi\, (r + \Delta r)^2 \cdot h - \pi\, r^2\, h \\ &= \pi(7{,}05)^2 \cdot 12 - \pi \cdot 7^2 \cdot 12 \\ &= 596{,}43\, \pi - 588\, \pi \\ &= 8{,}43\, \pi\, \text{m}^3. \end{aligned}$$

Portanto, o erro cometido na aproximação usada foi

$\Delta V - dV = 0{,}03\ \pi\ \text{m}^3.$

4.20 EXERCÍCIOS

Nos exercícios de 1 a 12 calcular as derivadas sucessivas até a ordem n indicada.

1. $y = 3x^4 - 2x\,;\ n = 5$
2. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\,;\ n = 3$
3. $y = 3 - 2x^2 + 4x^5\,;\ n = 10$
4. $y = \sqrt{3 - x^2}\,;\ n = 2$
5. $y = \dfrac{1}{x - 1}\,;\ n = 4$
6. $y = e^{2x+1}\,;\ n = 3$
7. $y = \dfrac{1}{e^x}\,;\ n = 4$
8. $y = \ln 2x\,;\ n = 2$
9. $y = \text{sen}\, a\, x\,;\ n = 7$
10. $y = -2 \cos \dfrac{x}{2}\,;\ n = 5$

11. $y = \text{tg}\, x$; $n = 3$

12. $y = \text{arc tg}\, x$; $n = 2$.

13. Achar a derivada de ordem 100 das funções:

a) $y = \text{sen}\, x$;

b) $y = \cos x$.

14. Mostrar que a derivada de ordem n da função $y = 1/x$ é dada por $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.

15. Mostrar que a derivada de ordem n da função $y = e^{ax}$ é dada por $y^{(n)} = a^n e^{ax}$.

16. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções deriváveis até 3ª ordem. Mostrar que:

a) $(fg)'' = gf'' + 2f'g' + fg''$;

b) $(fg)''' = gf''' + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$.

17. Mostrar que $x = A \cos(\omega t + \alpha)$, onde A, ω e α são constantes, satisfaz a equação

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \left(\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} \right).$$

18. Calcular $y' = \dfrac{dy}{dx}$ das seguintes funções definidas implicitamente.

a) $x^3 + y^3 = a^3$

b) $x^3 + x^2y + y^2 = 0$

c) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

d) $y^3 = \dfrac{x - y}{x + y}$

e) $a \cos^2(x + y) = b$

f) $\text{tg}\, y = xy$

g) $e^y = x + y$.

19. Determinar as retas tangente e normal à circunferência de centro (2, 0) e raio 2, nos pontos de abscissa 1.

20. Demonstrar que a reta tangente à elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ no ponto (x_0, y_0) tem a equação $\dfrac{x x_0}{a^2} + \dfrac{y y_0}{b^2} = 1$.

21. Em que pontos a reta tangente à curva $y^2 = 2x^3$ é perpendicular à reta $4x - 3y + 1 = 0$?

22. Mostrar que as curvas cujas equações são $2x^2 + 3y^2 = 5$ e $y^2 = x^3$ interceptam-se no ponto $(1, 1)$ e que suas tangentes nesse ponto são perpendiculares.

23. Calcular a derivada $y' = \dfrac{dy}{dx}$ das seguintes funções definidas na forma paramétrica. Para quais valores de t, y' está definida?

(*a*) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3, \ t \in (0, +\infty) \end{cases}$

(*b*) $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \text{sen } 2t, \ t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

(*c*) $\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 4 \text{ sen } t, \quad t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$

(*d*) $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \text{sen}^3 t, \quad t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right) \end{cases}$

(*e*) $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t^3 + 5, \ -\infty < t < +\infty \end{cases}$

f) $\begin{cases} x = 8 \cos^3 t \\ y = 8 \text{ sen}^3 t, \quad t \in [0, \pi] \end{cases}$

24. Determinar a equação da reta tangente à elipse

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 3 \text{ sen } t, \quad t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

no ponto $P\left(\sqrt{2}, \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

25. Determinar as equações da reta tangente e da reta normal à astróide

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \text{sen}^3 t, \quad t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

no ponto $P\left(-\frac{1}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$.

26. Encontrar $\Delta y - dy$ das funções dadas.

a) $y = 3x^2 - x + 1$; *b*) $y = 2\sqrt{x}$; *c*) $y = \frac{x+1}{2x-1}$.

27. Encontrar Δy e dy para os valores dados

a) $y = \frac{1}{2x^2}$; $\Delta x = 0{,}001$; $x = 1$;

b) $y = 5x^2 - 6x$; $\Delta x = 0{,}02$; $x = 0$;

c) $y = \frac{2x+1}{x-1}$; $\Delta x = 0{,}1$; $x = -1$;

28. Calcular um valor aproximado para as seguintes raízes, usando diferencial.

a) $\sqrt{50}$; *b*) $\sqrt[3]{63{,}5}$; *c*) $\sqrt[4]{13}$.

29. Calcular a diferencial das seguintes funções.

a) $y = \ln(3x^2 - 4x)$; *b*) $y = \frac{x+1}{e^x}$; *c*) $y = \text{sen}(5x^2 + 6)$.

30. A área S de um quadrado de lado x é dada por $S = x^2$. Achar o acréscimo e a diferencial desta função e determinar o valor geométrico desta última.

31. Dar a interpretação geométrica do acréscimo e da diferencial da função $S = \pi x^2$ (área do círculo).

32. Uma caixa em forma de um cubo deve ter um revestimento externo com espessura de 1/4 cm. Se o lado da caixa é de 2 m, usando diferencial, encontrar a quantidade de revestimento necessária.

33. Um material está sendo escoado de um recipiente, formando uma pilha cônica cuja altura é sempre igual ao raio da base. Se em dado instante o raio é 12 cm, use diferenciais para obter a variação do raio que origina um aumento de 2 cm^3 no volume da pilha.

34. Use diferenciais para obter o aumento aproximado do volume da esfera quando o raio varia de 3 cm a 3,1 cm.

35. Um terreno, em desapropriação para reforma agrária, tem a forma de um quadrado. Estima-se que cada um de seus lados mede 1 200 m, com um erro máximo de 10 m. Usando diferencial, determinar o possível erro no cálculo da área do terreno.

36. Um pintor é contratado para pintar ambos os lados de 50 placas quadradas com 40 cm de lado. Depois que recebeu as placas verificou que os lados das placas tinham 1/2 cm a mais. Usando diferencial, encontrar o aumento aproximado da porcentagem de tinta a ser usada.

MAKRON
Books

CAPÍTULO 5

EDITORA
DA UFSC

APLICAÇÕES DA DERIVADA

Neste capítulo, apresentaremos as aplicações da Derivada.

Em diversas áreas encontramos problemas que serão resolvidos utilizando a derivada como uma taxa de variação.

A análise do comportamento das funções será feita detalhadamente usando definições e teoremas que envolvem derivadas.

Finalmente, introduziremos as regras de L'Hospital, que serão usadas no cálculo de alguns limites.

5.1 VELOCIDADE E ACELERAÇÃO

Velocidade e aceleração são conceitos que todos nós conhecemos. Quando dirigimos um carro, podemos medir a distância percorrida num certo intervalo de tempo. O velocímetro marca, a cada instante, a velocidade. Se pisamos no acelerador ou no freio, percebemos que a velocidade muda. Sentimos a aceleração.

Mostraremos que podemos calcular a velocidade e a aceleração através de derivadas.

5.1.1 Velocidade. Suponhamos que um corpo se move em linha reta e que $s = s(t)$ represente o espaço percorrido pelo móvel até o instante t. Então, no intervalo de tempo entre t e $t + \Delta t$, o corpo sofre um deslocamento

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t).$$

Definimos a *velocidade média* nesse intervalo de tempo como o quociente

$$v_m = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t},$$

isto é, a velocidade média é o quociente do espaço percorrido pelo tempo gasto em percorrê-lo.

De forma geral, a velocidade média nada nos diz sobre a velocidade do corpo no instante t. Para obtermos a *velocidade instântanea* do corpo no instante t, calculamos sua velocidade média em instantes de tempo Δt cada vez menores. A velocidade instantânea, ou velocidade no instante t, é o limite das velocidades médias quando Δt se aproxima de zero, isto é,

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Como já vimos no capítulo anterior, esse limite é a derivada da função $s = s(t)$ em relação a t. Portanto,

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}.$$

5.1.2 Aceleração. O conceito de aceleração é introduzido de maneira análoga ao de velocidade.

A *aceleração média* no intervalo de tempo de t até $t + \Delta t$ é dada por

$$a_m = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

Observamos que ela mede a variação da velocidade do corpo por unidade de tempo no intervalo de tempo Δt. Para obtermos a aceleração do corpo no instante t,

tomamos sua aceleração média em intervalos de tempo Δt cada vez menores. A *aceleração instantânea* é o limite

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t).$$

Logo, a derivada da velocidade nos dá a aceleração. Como $v(t) = s'(t)$, temos $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

5.1.3 Exemplos

(*i*) No instante $t = 0$ um corpo inicia um movimento em linha reta. Sua posição no instante t é dada por $s(t) = 16t - t^2$.

Determinar:

(*a*) a velocidade média do corpo no intervalo de tempo [2, 4];

(*b*) a velocidade do corpo no instante $t = 2$;

(*c*) a aceleração média no intervalo [0, 4];

(*d*) a aceleração no instante $t = 4$.

(*a*) A velocidade média do corpo no intervalo de tempo entre 2 e 4 é dada por

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{s(4) - s(2)}{4 - 2} \\ &= \frac{(16 \cdot 4 - 4^2) - (16 \cdot 2 - 2^2)}{4 - 2} \\ &= \frac{48 - 28}{2} \\ &= 10 \text{ unid. veloc.}. \end{aligned}$$

(b) A velocidade do corpo no instante $t = 2$ é o valor da derivada $s\,'(t)$ no ponto $t = 2$. Como $s(t) = 16t - t^2$, temos

$$v(t) = s\,'(t) = 16 - 2t.$$

No instante $t = 2$, a velocidade é

$$\begin{aligned} v(2) &= 16 - 2 \cdot 2 \\ &= 12 \text{ unid. veloc.} \end{aligned}$$

(c) A aceleração média no intervalo [0, 4] é dada por

$$a_m = \frac{v(4) - v(0)}{4 - 0}.$$

Como $v(t) = 16 - 2t$, temos

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{(16 - 2 \cdot 4) - (16 - 2 \cdot 0)}{4} \\ &= \frac{8 - 16}{4} \\ &= -2 \text{ unid. aceler.} \,. \end{aligned}$$

(d) A aceleração no instante $t = 4$ é dada pela derivada $v\,'(4)$. Como $v(t) = 16 - 2t$, temos $a(t) = v\,'(t) = -2$. Portanto,

$$a(4) = -2 \text{ unid. aceler.} \,.$$

(ii) A equação do movimento de um corpo em queda livre é

$$s = \frac{1}{2}\, gt^2,$$

onde $g \cong 9{,}8$ m/s^2 é a aceleração da gravidade. Determinar a velocidade e a aceleração do corpo em um instante qualquer t.

Num instante qualquer t, a velocidade é dada por

$$\begin{aligned} v(t) &= s'(t) \\ &= \frac{1}{2}g \cdot 2t \\ &= gt \text{ m/s.} \end{aligned}$$

A aceleração num instante t é

$$\begin{aligned} a(t) &= v'(t) \\ &= g \text{ m/s}^2, \end{aligned}$$

que é a aceleração de gravidade.

5.2 TAXA DE VARIAÇÃO

Na seção anterior vimos que quando um corpo se move em linha reta de acordo com a equação do movimento $s = s(t)$, a sua velocidade é dada por $v = s'(t)$.

Sabemos que a velocidade representa a razão de variação do deslocamento por unidade de variação do tempo. Assim, a derivada $s'(t)$ é a *taxa de variação da função* $s(t)$ por unidade de variação t.

O mesmo ocorre com a aceleração que é dada por $a(t) = v'(t)$. Ela representa a razão de variação da velocidade $v(t)$ por unidade de variação do tempo t.

Toda derivada pode ser interpretada como uma taxa de variação. Dada uma função $y = f(x)$, quando a variável independente varia de x a $x + \Delta x$, a correspondente variação de y será $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. O quociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

representa a *taxa média de variação* de y em relação a x.

A derivada

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

é a *taxa instantânea de variação* ou simplesmente *taxa de variação* de y em relação a x.

A interpretação da derivada como uma razão de variação tem aplicações práticas nas mais diversas ciências. Vejamos alguns exemplos.

5.2.1 Exemplos

(*1*) Sabemos que a área de um quadrado é função de seu lado. Determinar:

(*a*) a taxa de variação média da área de um quadrado em relação ao lado quando este varia de 2,5 a 3 m.;

(*b*) a taxa de variação da área em relação ao lado quando este mede 4 m.

Solução. Sejam A a área do quadrado e l seu lado. Sabemos que

$A = l^2$.

(*a*) A taxa média de variação de A em relação a l quando l varia de 2,5 m a 3 m é dada por

$$\frac{\Delta A}{\Delta l} = \frac{A(3) - A(2{,}5)}{3 - 2{,}5}$$

$$= \frac{9 - 6{,}25}{0{,}5}$$

$$= \frac{2,75}{0,5}$$

$$= 5,5.$$

(*b*) A taxa de variação da área em relação ao lado é dada por

$$\frac{dA}{dl} = \frac{d}{dl}(l^2)$$

$$= 2\,l.$$

Quando $l = 4$, temos

$$\frac{dA}{dl} = 2 \cdot 4 = 8\,,$$

ou,

$$\left.\frac{dA}{dl}\right|_{(4)} = 8\,.$$

Portanto, quando $l = 4$ m, a taxa de variação da área do quadrado será de 8 m^2 por variação de 1 metro no comprimento do lado.

(2) Uma cidade X é atingida por uma moléstia epidêmica. Os setores de saúde calculam que o número de pessoas atingidas pela moléstia depois de um tempo t (medido em dias a partir do primeiro dia da epidemia) é, aproximadamente, dado por

$$f(t) = 64t - \frac{t^3}{3}\cdot$$

(*a*) Qual a razão da expansão da epidemia no tempo $t = 4$?

(*b*) Qual a razão da expansão da epidemia no tempo $t = 8$?

(*c*) Quantas pessoas serão atingidas pela epidemia no 5º dia?

Solução. A taxa com que a epidemia se propaga é dada pela razão de variação da função $f(t)$ em relação a t. Portanto, para um tempo t qualquer, essa taxa é dada por

$$f'(t) = 64 - t^2.$$

(*a*) No tempo $t = 4$, temos

$$f'(4) = 64 - 16 = 48.$$

Logo, no tempo $t = 4$, a moléstia está se alastrando à razão de 48 pessoas por dia.

(*b*) No tempo $t = 8$, temos

$$\begin{aligned} f'(8) &= 64 - 64 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, no tempo $t = 8$ a epidemia está totalmente controlada.

(*c*) Como o tempo foi contado em dias a partir do 1º dia de epidemia, o 5º dia corresponde à variação de t de 4 para 5.

O número de pessoas atingidas pela moléstia durante o quinto dia será dado por

$$\begin{aligned} f(5) - f(4) &= \left(64 \cdot 5 - \frac{5^3}{3}\right) - \left(64 \cdot 4 - \frac{4^3}{3}\right) \\ &= 320 - \frac{125}{3} - 256 + \frac{64}{3} \\ &\cong 43. \end{aligned}$$

No item (*a*), vimos que no tempo $t = 4$ (início do 5º), a epidemia se alastra a uma taxa de 48 pessoas por dia. No item (*c*), calculamos que durante o 5º dia 43 pessoas serão atingidas. Essa diferença ocorreu porque a taxa de propagação da moléstia se modificou no decorrer do dia.

(*3*) Analistas de produção verificaram que em uma montadora x, o número de peças produzidas nas primeiras t horas diárias de trabalho é dado por

$$f(t) = \begin{cases} 50(t^2 + t), & \text{para } 0 \leq t \leq 4 \\ 200(t + 1), & \text{para } 4 \leq t \leq 8. \end{cases}$$

(*a*) Qual a razão de produção (em unidades por hora) após 3 horas de trabalho? E após 7 horas?

(*b*) Quantas peças são produzidas na 8ª hora de trabalho?

Solução.

(*a*) A razão de produção após 3 horas de trabalho é dada por $f'(3)$. Para $t < 4$, temos

$$f'(t) = 50(2t + 1).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f'(3) &= 50(2 \cdot 3 + 1) \\ &= 350. \end{aligned}$$

Logo, após 3 horas de trabalho a razão de produção é de 350 peças por hora de trabalho.

A razão de produção após 7 horas de trabalho é dada por $f'(7)$. Para $t > 4$, $f'(t) = 200$.

Logo, após 7 horas de trabalho a razão de produção é de 200 peças por hora de trabalho.

(*b*) O número de peças produzidas na oitava hora de trabalho é dado por

$$\begin{aligned} f(8) - f(7) &= 200(8 + 1) - 200(7 + 1) \\ &= 200. \end{aligned}$$

Neste exemplo, o número de peças produzidas na 8ª hora de trabalho coincidiu com a razão de produção após 7 horas de trabalho. Isso ocorreu porque a razão de produção permaneceu constante durante o tempo considerado.

(*4*) Um reservatório de água está sendo esvaziado para limpeza. A quantidade de água no reservatório, em litros, t horas após o escoamento ter começado é dada por

$$V = 50(80 - t)^2.$$

Determinar:

(*a*) A taxa de variação média do volume de água no reservatório durante as 10 primeiras horas de escoamento.

(*b*) A taxa de variação do volume de água no reservatório após 8 horas de escoamento.

(*c*) A quantidade de água que sai do reservatório nas 5 primeiras horas de escoamento.

Solução.

(*a*) A taxa de variação média do volume nas 10 primeiras horas é dada por

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{50\,(80 - 10)^2 - 50\,(80 - 0)^2}{10}$$

$$= \frac{50\,[70^2 - 80^2]}{10}$$

$$= 50 \cdot (-150)$$

$$= -7.500 \text{ l/hora.}$$

O sinal negativo aparece porque o volume de água está diminuindo com o tempo.

(*b*) A taxa de variação do volume de água num tempo qualquer é dada por

$$\frac{dV}{dt} = 50 \cdot 2(80 - t)(-1)$$

$$= -100(80 - t).$$

No tempo $t = 8$, temos

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(8)} = -100(80 - 8)$$

$$= -100 \cdot 72$$

$$= -720 \text{ l/h}.$$

(*c*) A quantidade de água que sai do reservatório nas 5 primeiras horas é dada por

$$V(0) - V(5) = 50(80)^2 - 50(75)^2$$

$$= 38.750 \text{ l}.$$

Em muitas situações práticas a quantidade em estudo é dada por uma função composta. Nestes casos, para determinar a taxa de variação, devemos usar a regra da cadeia. Vejamos os exemplos que seguem.

(5) Um quadrado de lado l está se expandindo segundo a equação $l = 2 + t^2$, onde a variável t representa o tempo. Determinar a taxa de variação da área desse quadrado no tempo $t = 2$.

Solução. Seja A a área do quadrado. Sabemos que $A = l^2$ e que $l = 2 + t^2$.

A taxa de variação da área em relação ao tempo, num tempo t qualquer é dada por $\frac{dA}{dt}$.

Usando a regra da cadeia, vem

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= \frac{dA}{dl} \cdot \frac{dl}{dt} \\ &= 2l \cdot 2t \\ &= 4l\,t \\ &= 4(2 + t^2) \cdot t.\end{aligned}$$

No tempo $t = 2$, temos

$$\begin{aligned}\left.\frac{dA}{dt}\right|_{(2)} &= 4\,(2 + 2^2) \cdot 2 \\ &= 48 \text{ unid. área/unid. tempo.}\end{aligned}$$

(*6*) O raio de uma circunferência cresce à razão de 21 cm/s. Qual a taxa de crescimento do comprimento da circunferência em relação ao tempo?

Solução. Sejam r = raio da circunferência,

t = tempo,

l = comprimento da circunferência.

Da geometria, sabemos que $l = 2\,\pi\,r$.

Por hipótese, a taxa de crescimento de r em relação a t é $\frac{dr}{dt} = 21$ cm/s.

A taxa de crescimento de l em relação a t é dada por $\frac{dl}{dt}$. Usando a regra da cadeia, vem

$$\frac{dl}{dt} = \frac{dl}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$= 2\pi \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$= 2\,\pi \cdot 21$$

$$= 42\,\pi \text{ cm/s.}$$

(7) Um ponto $P(x, y)$ se move ao longo do gráfico da função $y = 1/x$. Se a abscissa varia à razão de 4 unidades por segundo, qual é a taxa de variação da ordenada quando a abscissa é $x = 1/10$?

Solução. Temos

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Como x varia à razão de 4 unid./seg, $\frac{dx}{dt} = 4$. Como $y = 1/x$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$.

Então,

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{x^2} \cdot 4$$

$$= \frac{-4}{x^2}.$$

Quando $x = 1/10$, temos

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-4}{(1/10)^2}$$

$$= -4 \cdot 100$$

$$= -400\,.$$

Portanto, quando a abscissa do ponto P é $x = 1/10$ e está *crescendo* a uma taxa de 4 unid./seg a ordenada *decresce* a uma razão de 400 unid./s. Intuitivamente, podemos perceber isso analisando o gráfico de f (Ver Figura 5.1).

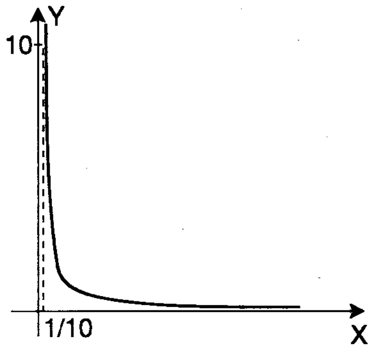


Figura 5-1

(*8*) Acumula-se areia em um monte com a forma de um cone onde a altura é igual ao raio da base. Se o volume de areia cresce a uma taxa de $10\ m^3/h$, a que razão aumenta a área da base quando a altura do monte é de 4 m?

Solução. Sejam V = volume de areia,

h = altura do monte,

r = raio da base,

A = área da base. (Ver Figura 5.2.)

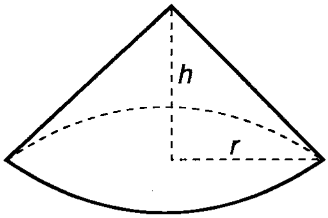


Figura 5-2

Da geometria, sabemos que

$$A = \pi r^2 \qquad (1)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h. \qquad (2)$$

Por hipótese, $\frac{dV}{dt} = 10$ m³/h e $h = r$. Substituindo $h = r$ em (2), temos

$$V = \frac{1}{3}\pi r^3. \qquad (3)$$

Queremos encontrar a taxa de variação $\frac{dA}{dt}$ quando $r = 4$ m.

Derivando (*1*) em relação a t, temos

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}$$

$$= 2\pi r\cdot\frac{dr}{dt}.$$

Precisamos determinar $\frac{dr}{dt}$ · Derivando a equação (*3*) em relação a t, vem

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}$$

$$= \pi r^2\cdot\frac{dr}{dt}.$$

Como $\frac{dV}{dt} = 10$ m³/h, temos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{\pi r^2}\cdot 10$$

$$= \frac{10}{\pi r^2}.$$

Portanto,

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \cdot \frac{10}{\pi r^2}$$

$$= \frac{20}{r}.$$

Quando $r = h = 4$ m, $\frac{dA}{dt} = \frac{20}{4} = 5$.

Logo, quando a altura do monte é de 4 m, a área da base cresce a uma taxa de 5 m^2/h.

5.3 EXERCÍCIOS

1. Um corpo se move em linha reta, de modo que sua posição no instante t é dada por $f(t) = 16t + t^2$, $0 \leq t \leq 8$, onde o tempo é dado em segundos e a distância em metros.

   (*a*) Achar a velocidade média durante o intervalo de tempo $[b, b + h]$, $0 \leq b < 8$.

   (*b*) Achar a velocidade média durante os intervalos [3; 3,1], [3; 3,01] e [3; 3,001].

   (*c*) Determinar a velocidade do corpo num instante qualquer t.

   (*d*) Achar a velocidade do corpo no instante $t = 3$.

   (*e*) Determinar a aceleração no instante t.

2. Influências externas produzem uma aceleração numa partícula de tal forma que a equação de seu movimento retilíneo é $y = \frac{b}{t} + ct$, onde y é o deslocamento e t o tempo.

   (*a*) Qual a velocidade da partícula no instante $t = 2$?

   (*b*) Qual é a equação da aceleração?

3. A posição de uma partícula que se move no eixo dos x depende do tempo de acordo com a equação $x = 3t^2 - t^3$, em que x vem expresso em metros e t em segundos.

(*a*) Qual é o seu deslocamento depois dos primeiros 4 segundos?

(*b*) Qual a velocidade da partícula ao terminar cada um dos 4 primeiros segundos?

(*c*) Qual é a aceleração da partícula em cada um dos 4 primeiros segundos?

4. Um corpo cai livremente partindo do repouso. Calcule sua posição e sua velocidade depois de decorridos 1 e 2 segundos. (Da Física, use a equação $y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ para determinar a posição y do corpo, onde v_0 é a velocidade inicial e $g \cong 9{,}8 \text{ m/s}^2$).

5. Numa granja experimental, constatou-se que uma ave em desenvolvimento pesa em gramas

$$W(t) = \begin{cases} 20 + \frac{1}{2}(t+4)^2 & , \ 0 \leq t \leq 60 \\ 24{,}4t + 604 & , \ 60 \leq t \leq 90, \end{cases}$$

onde t é medido em dias.

(*a*) Qual a razão de aumento do peso da ave quando $t = 50$?

(*b*) Quanto a ave aumentará no 51º dia?

(*c*) Qual a razão de aumento do peso quando $t = 80$?

6. Uma peça de carne foi colocada num freezer no instante $t = 0$. Após t horas, sua temperatura, em graus centígrados, é dada por

$$T(t) = 30 - 5t + \frac{4}{t+1}, \ 0 \leq t \leq 5.$$

Qual a velocidade de redução de sua temperatura após 2 horas?

7. A temperatura de um gás é mantida constante e sua pressão p em kgf/cm^3 e volume v em cm^3 estão relacionadas pela igualdade $vp = c$, onde c é constante. Achar a razão de variação do volume em relação à pressão quando esta vale 10 kgf/cm^3.

8. Uma piscina está sendo drenada para limpeza. Se o seu volume de água inicial era de 90.000 litros e depois de um tempo de t horas este volume diminuiu $2500\, t^2$ litros, determinar:

(*a*) tempo necessário para o esvaziamento da piscina;

(*b*) taxa média de escoamento no intervalo [2, 5];

(*c*) taxa de escoamento depois de 2 horas do início do processo.

9. Um apartamento está alugado por Cr\$ 4.500,00. Este aluguel sofrerá um reajuste anual de Cr\$ 1.550,00.

(*a*) Expresse a função com a qual podemos calcular a taxa de variação do aluguel, em t anos.

(*b*) Calcule a taxa de variação do aluguel após 4 anos.

(*c*) Qual a porcentagem de variação do aluguel depois de 1 ano do primeiro reajuste?

(*d*) Que acontecerá à porcentagem de variação depois de alguns anos?

10. Numa pequena comunidade obteve-se uma estimativa que daqui a t anos a população será de

$p(t) = 20 - \frac{5}{t+1}$ milhares.

(*a*) Daqui a 18 meses, qual será a taxa de variação da população desta comunidade?

(*b*) Qual será a variação real sofrida durante o 18º mês?

11. Seja r a raiz cúbica de um número real x. Encontre a taxa de variação de r em relação a x quando x for igual a 8.

12. Um líquido goteja em um recipiente. Após t horas, há $5t - t^{1/2}$ litros no recipiente. Qual a taxa de gotejamento de líquido no recipiente, em l/hora, quando $t = 16$ horas?

13. Um tanque tem a forma de um cilindro circular reto de 5 m de raio de base e 10 m de altura. No tempo $t = 0$, a água começa a fluir no tanque à razão de 25 m^3/h. Com que velocidade o nível de água sobe? Quanto tempo levará para o tanque ficar cheio?

14. Achar a razão de variação do volume v de um cubo em relação ao comprimento de sua diagonal. Se a diagonal está se expandindo a uma taxa de 2 m/s, qual a razão de variação do volume quando a diagonal mede 3 m?

15. Uma usina de britagem produz pó de pedra, que ao ser depositado no solo, forma uma pilha cônica onde a altura é aproximadamente igual a 4/3 do raio da base.

(*a*) Determinar a razão de variação do volume em relação ao raio da base.

(*b*) Se o raio da base varia a uma taxa de 20 cm/s, qual a razão de variação do volume quando o raio mede 2 m?

16. Os lados de um triângulo equilátero crescem à taxa de 2,5 cm/s.

(*a*) Qual é a taxa de crescimento da área desse triângulo, quando os lados tiverem 12 cm de comprimento?

(*b*) Qual é a taxa de crescimento do perímetro, quando os lados medirem 10 cm de comprimento?

17. Um objeto se move sobre a parábola $y = 2x^2 + 3x - 1$ de tal modo que sua abscissa varia à taxa de 6 unidades por minuto. Qual é a taxa de variação de sua ordenada quando o objeto estiver no ponto $(0, -1)$?

18. Um trem deixa uma estação, num certo instante, e vai para a direção norte à razão de 80 km/h. Um segundo trem deixa a mesma estação 2 horas depois e vai na direção leste à razão de 95 km/h. Achar a taxa na qual estão se separando os dois trens 2 horas e 30 minutos depois do segundo trem deixar a estação.

19. Uma lâmpada colocada em um poste está a 4 m de altura. Se uma criança de 90 cm de altura caminha afastando-se da lâmpada à razão de 5 m/s, com que rapidez se alonga sua sombra?

20. O raio de um cone é sempre igual à metade de sua altura h. Determinar a taxa de variação da área da base em relação ao volume do cone.

Análise do Comportamento das Funções

Dada uma curva $y = f(x)$, usaremos a derivada para obter alguns dados acerca da curva. Por exemplo, discutiremos os pontos de máximos e mínimos, os intervalos onde a curva é crescente ou decrescente.

Esses dados nos levam a um método geral para construir esboços de gráficos de funções.

5.4 MÁXIMOS E MÍNIMOS

A Figura 5.3 nos mostra o gráfico de uma função $y = f(x)$, onde assinalamos pontos de abscissas x_1, x_2, x_3 e x_4.

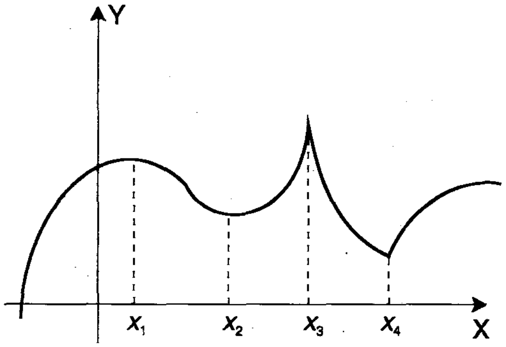


Figura 5-3

Esses pontos são chamados *pontos extremos* da função. $f(x_1)$ e $f(x_3)$ são chamados *máximos relativos* e $f(x_2)$, $f(x_4)$ são chamados *mínimos relativos.*

Podemos formalizar as definições.

5.4.1 Definição. Uma função f tem um máximo relativo em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I \cap D(f)$.

5.4.2 Definição. Uma função f tem um mínimo relativo em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I \cap D(f)$.

5.4.3 Exemplo. A função $f(x) = 3x^4 - 12x^2$ tem um máximo relativo em $c_1 = 0$, pois existe o intervalo $(-2, 2)$ tal que $f(0) \geq f(x)$ para todo $x \in (-2, 2)$.

Em $c_2 = -\sqrt{2}$ e $c_3 = +\sqrt{2}$, a função dada tem mínimos relativos pois $f(-\sqrt{2}) \leq f(x)$ para todo $x \in (-2,0)$ e $f(\sqrt{2}) \leq f(x)$ para todo $x \in (0, 2)$ (ver Figura 5.4).

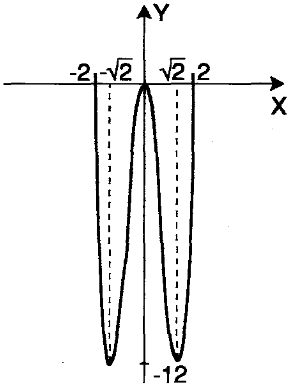


Figura 5-4

A proposição seguinte permite encontrar os possíveis pontos extremos de uma função.

5.4.4 Proposição. Suponhamos que $f(x)$ existe para todos os valores de $x \in (a, b)$ e que f tem um extremo relativo em c, onde $a < c < b$. Se $f'(c)$ existe, então $f'(c) = 0$.

Prova. Suponhamos que f tem um ponto de máximo relativo em c e que $f'(c)$ existe. Então,

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Como f tem um ponto de máximo relativo em c, pela definição 5.4.1, se x estiver suficientemente próximo de c temos que $f(c) \geq f(x)$ ou $f(x) - f(c) \leq 0$.

Se $x \to c^+$, temos $x - c > 0$. Portanto, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$ e então

$$f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0. \qquad (1)$$

Se $x \to c^-$, temos $x - c < 0$. Portanto, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ e então

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 . \qquad (2)$$

Por (*1*) e (2), concluímos que $f'(c) = 0$.

Se f tem um ponto de mínimo relativo em c, a demonstração é análoga.

Esta proposição pode ser interpretada geometricamente. Se f tem um extremo relativo em c e se $f'(c)$ existe, então o gráfico de $y = f(x)$ tem uma reta tangente horizontal no ponto onde $x = c$.

Da proposição, podemos concluir que quando $f'(c)$ existe, a condição $f'(c) = 0$ é ***necessária*** para a existência de um extremo relativo em c. Esta condição ***não é suficiente*** (ver Figura 5.5(a)). Isto é, se $f'(c) = 0$, a função f pode ter ou não um extremo relativo no ponto c.

Da mesma forma, a Figura 5.5(*b*) e (*c*) nos mostra que quando $f'(c)$ não existe, $f(x)$ pode ter ou não um extremo relativo em c.

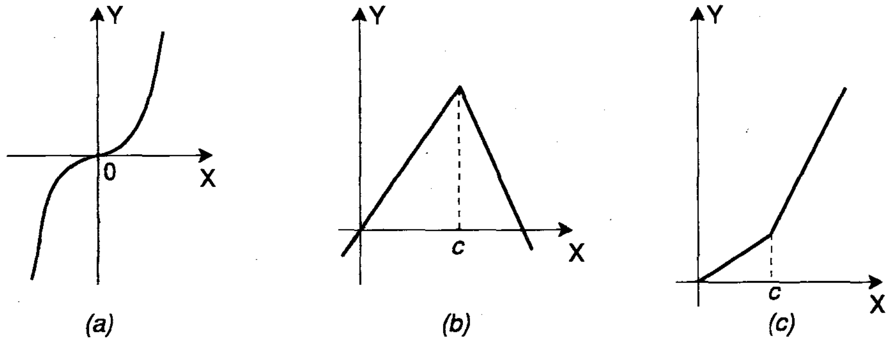


Figura 5-5

O ponto $c \in D(f)$ tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe, é chamado *ponto crítico* de f.

Portanto, uma condição necessária para a existência de um extremo relativo em um ponto c é que c seja um ponto crítico.

É interessante verificar que uma função definida num dado intervalo pode admitir diversos pontos extremos relativos. *O maior valor* da função num intervalo é

chamado ***máximo absoluto*** da função nesse intervalo. Analogamente, o menor valor é chamado ***mínimo absoluto***.

Por exemplo, a função $f(x) = 3x$ tem um mínimo absoluto igual a 3 em $[1, 3)$. Não existe um máximo absoluto em $[1, 3)$.

A função $f(x) = -x^2 + 2$ possui um máximo absoluto igual a 2 em $(-3, 2)$. Também podemos dizer que -7 é mínimo absoluto em $[-3, 2]$.

Temos a seguinte proposição, cuja demonstração será omitida.

5.4.5 Proposição. Seja f: $[a, b] \to I\!R$ uma função contínua, definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Então f assume máximo e mínimo absoluto em $[a, b]$.

Para analisarmos o máximo e o mínimo absoluto de uma função quando o intervalo não for especificado usamos as definições que seguem.

5.4.6 Definição. Dizemos que $f(c)$ é o máximo absoluto da função f, se $c \in D(f)$ e $f(c) \geq f(x)$ para todos os valores de x no domínio de f.

5.4.7 Definição. Dizemos que $f(c)$ é o mínimo absoluto da função f se $c \in D(f)$, e $f(c) \leq f(x)$ para todos os valores de x no domínio de f.

5.4.8 Exemplos

(*i*) A função $f(x) = x^2 + 6x - 3$ tem um mínimo absoluto igual a -12 em $c = -3$, já que $f(-3) = -12 \leq f(x)$ para todos os valores de $x \in D(f)$ (ver Figura 5.6(*a*)).

(*ii*) A função $f(x) = -x^2 + 6x - 3$ tem um máximo absoluto igual a 6 em $c = 3$, já que $f(3) = 6 \geq f(x)$ para todos os $x \in D(f)$ (ver Figura 5.6(*b*)).

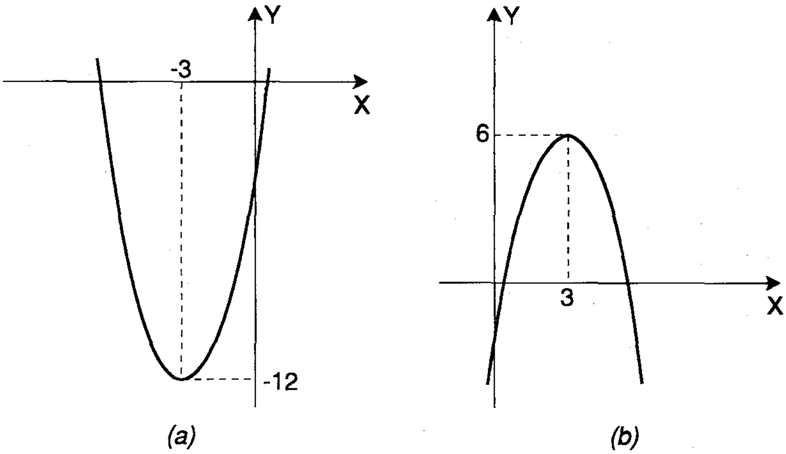


Figura 5-6

5.5 TEOREMAS SOBRE DERIVADAS

5.5.1 Teorema de Rolle. Seja f uma função definida e contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Se $f(a) = f(b) = 0$, então existe pelo menos um ponto c entre a e b tal que $f'(c) = 0$.

Prova. Faremos a prova em duas partes.

1ª parte. Seja $f(x) = 0$, para todo x, $a \leq x \leq b$. Então $f'(x) = 0$ para todo x, $a < x < b$. Portanto, qualquer número entre a e b pode ser tomado para c.

2ª parte. Seja $f(x) \neq 0$, para algum x, $a < x < b$. Como f é contínua em $[a, b]$, pela proposição 5.4.5, f atinge seu máximo e seu mínimo em $[a, b]$. Sendo $f(x) \neq 0$ para algum $x \in (a, b)$, um dos extremos de f será diferente de zero. Como $f(a) = f(b) = 0$, esse extremo será atingido em um ponto $c \in (a, b)$.

Como f é derivável em $c \in (a, b)$, usando a proposição 5.4.4, concluímos que $f'(c) = 0$.

5.5.2 Teorema do Valor Médio. Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Então existe um número c no intervalo (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Antes de provar este teorema apresentaremos sua *interpretação geométrica*.

Geometricamente, o teorema do valor médio estabelece que se a função $y = f(x)$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existe pelo menos um ponto c entre a e b onde a tangente à curva é paralela à corda que une os pontos $P\ (a, f(a))$ e $Q\ (b, f(b))$ (ver Figura 5.7).

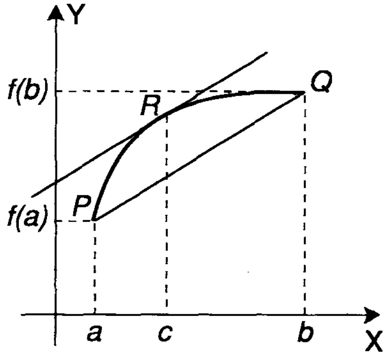


Figura 5-7

Prova do Teorema do Valor Médio. Sejam $P\ (a, f(a))$ e $Q\ (b, f(b))$. A equação da reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a).$$

Fazendo $y = h\,(x)$, temos

$$h\,(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a) + f(a).$$

Como $h\ (x)$ é uma função polinomial, $h\ (x)$ é contínua e derivável em todos os pontos.

Consideremos a função $g\ (x) = f(x) - h\ (x)$. Esta função determina a distância vertical entre um ponto $(x, f(x))$ do gráfico de f e o ponto correspondente na reta secante $\overleftrightarrow{PQ}$.

Temos,

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)\,.$$

A função $g\ (x)$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle em $[a, b]$. De fato,

(*i*) $g\ (x)$ é contínua em $[a, b]$ já que $f(x)$ e $h\ (x)$ são contínuas em $[a, b]$.

(*ii*) $g\ (x)$ é derivável em (a, b) pois $f(x)$ e $h\ (x)$ são deriváveis em (a, b).

(*iii*) $g\ (a) = g\ (b) = 0$, pois

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) - f(a) = 0$$

e

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) - f(a) = 0\,.$$

Portanto, existe um ponto c entre a e b tal que $g'(c) = 0$.

Como $g\,'(x) = f\,'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, temos

$$g\,'(c) = f\,'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

e desta forma,

$$f\,'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

5.6 FUNÇÕES CRESCENTES E DECRESCENTES

5.6.1 Definição. Dizemos que uma função f, definida num intervalo I, é *crescente* neste intervalo se para quaisquer $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) \leq f(x_2)$ (ver Figura 5.8).

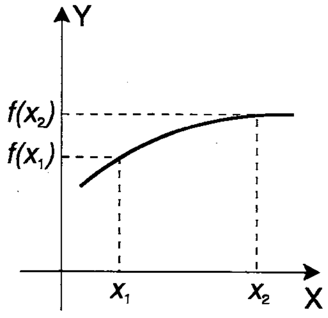


Figura 5-8

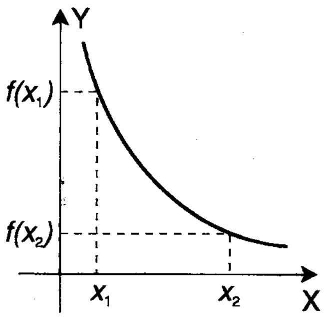


Figura 5-9

5.6.2 Definição. Dizemos que uma função f, definida num intervalo I, é *decrescente* nesse intervalo se para quaisquer $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) \geq f(x_2)$ (ver Figura 5.9).

Se uma função é crescente ou decrescente num intervalo, dizemos que é *monótona* neste intervalo.

Analisando geometricamente o sinal da derivada podemos determinar os intervalos onde uma função derivável é crescente ou decrescente. Temos a seguinte proposição.

5.6.3 Proposição. Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável no intervalo (a, b).

(*i*) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ então f é crescente em $[a, b]$;

(ii) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$ então f é decrescente em $[a, b]$.

Prova. Sejam x_1 e x_2 dois números quaisquer em $[a, b]$ tais que $x_1 < x_2$. Então f é contínua em $[x_1, x_2]$ e derivável em (x_1, x_2). Pelo teorema do valor médio, segue que

$$\exists\ c \in (x_1, x_2) \quad \text{tal que} \quad f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \qquad (1)$$

(*i*) Por hipótese, $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$. Então $f'(c) > 0$. Como $x_1 < x_2$, $x_2 - x_1 > 0$.

Analisando a igualdade (*1*), concluímos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, ou seja, $f(x_2) > f(x_1)$.

Logo, f é crescente em $[a, b]$.

(*ii*) Neste caso, $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$. Temos então $f'(c) < 0$ e $x_2 - x_1 > 0$.

Analisando a igualdade (*1*), concluímos que $f(x_2) - f(x_1) < 0$ e dessa forma $f(x_2) < f(x_1)$.

Logo, f é decrescente em $[a, b]$.

Observamos que a hipótese da continuidade de f no intervalo fechado $[a, b]$ é muito importante. De fato, tomando por exemplo, a função

$f: [0, 1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{para } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{para } x = 1 \end{cases}$$

temos que $f'(x) = 1 > 0$ para todo $x \in (0, 1)$ e no entanto, f não é crescente em $[0, 1]$.

A proposição não pode ser aplicada porque $f(x)$ não é contínua no ponto 1.

5.6.4 Exemplos. Determinar os intervalos nos quais as funções seguintes são crescentes ou decrescentes.

(*i*) $f(x) = x^3 + 1$.

Vamos derivar a função e analisar quais os números x tais que $f'(x) > 0$ e quais os números x tais que $f'(x) < 0$.

Temos,

$f'(x) = 3x^2$.

Como $3x^2$ é maior que zero para todo $x \neq 0$, concluímos que a função é sempre crescente.

A Figura 5.10 ilustra este exemplo.

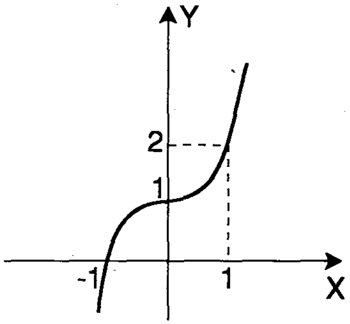


Figura 5-10

(*ii*) $f(x) = x^2 - x + 5$.

Temos $f'(x) = 2x - 1$. Então, para $2x - 1 > 0$ ou $x > 1/2$ a função é crescente.

Para $2x - 1 < 0$ ou $x < 1/2$ a função é decrescente (ver Figura 5.11).

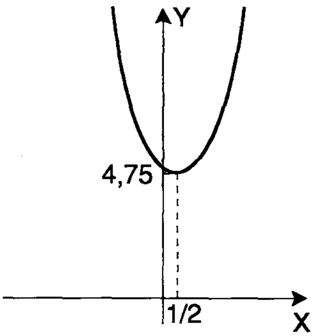


Figura 5-11

$$(iii)\ f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4, & \text{se } x \leq 1 \\ -x - 1, & \text{se } x \geq 1\,. \end{cases}$$

O gráfico de $f(x)$ pode ser visto na Figura 5.12.

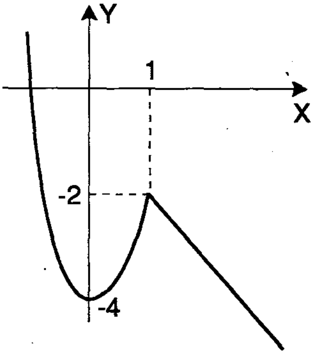


Figura 5-12

Se $x < 1$, então $f'(x) = 4x$. Temos,

$4x > 0$ para $x \in (0, 1)$;

$4x < 0$ para $x \in (-\infty, 0)$.

Se $x > 1$, temos $f'(x) = -1$. Então, $f'(x) < 0$ para todo $x \in (1, +\infty)$. Concluímos que f é crescente em $[0, 1]$ e decrescente em $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$.

5.7 CRITÉRIOS PARA DETERMINAR OS EXTREMOS DE UMA FUNÇÃO

A seguir demonstraremos teoremas que estabelecem critérios para determinar os extremos de uma função.

5.7.1 Teorema (Critério da derivada primeira para determinação de extremos). Seja f uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ que possui derivada em todo o ponto do intervalo (a, b), exceto possivelmente num ponto c.

(*i*) Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então f tem um máximo relativo em c.

(*ii*) Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então f tem um mínimo relativo em c.

Prova.

(*i*) Usando a proposição 5.6.3, podemos concluir que f é crescente em $[a, c]$ e decrescente em $[c, b]$. Portanto, $f(x) < f(c)$ para todo $x \neq c$ em (a, b) e assim f tem um máximo relativo em c.

(*ii*) Pela proposição 5.6.3, concluímos que f é decrescente em $[a, c]$ e crescente em $[c, b]$. Logo $f(x) > f(c)$ para todo $x \neq c$ em (a, b). Portanto, f tem um mínimo relativo em c.

A Figura 5.13 ilustra as diversas possibilidades do teorema.

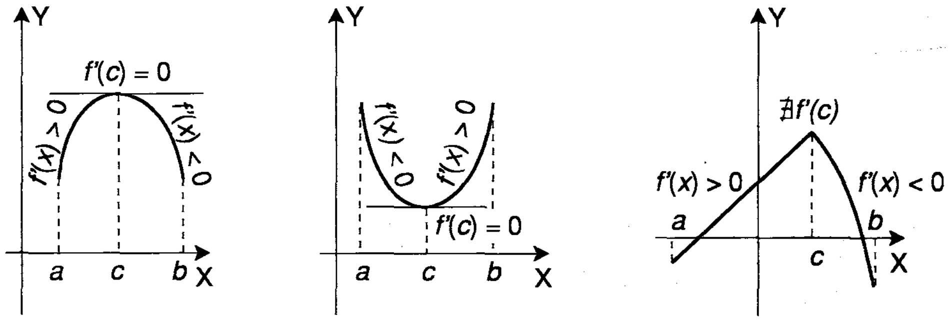


Figura 5-13

5.7.2 Exemplos

(*i*) Encontrar os intervalos de crescimento, decrescimento e os máximos e mínimos relativos da função

$$f(x) = x^3 - 7x + 6.$$

Temos $f'(x) = 3x^2 - 7$, para todo x. Fazendo $f'(x) = 0$, vem

$$3x^2 - 7 = 0$$

ou,

$$x = \pm \sqrt{7/3}.$$

Portanto, os pontos críticos da função f são $+\sqrt{7/3}$ e $-\sqrt{7/3}$.

Para $x < -\sqrt{7/3}$, $f'(x)$ é positiva. Aplicando a proposição 5.6.3, concluímos que f é crescente em $(-\infty, -\sqrt{7/3})$. Para $-\sqrt{7/3} < x < \sqrt{7/3}$, $f'(x)$ é negativa. Então f é decrescente em $[-\sqrt{7/3}, \sqrt{7/3}]$. Para $x > \sqrt{7/3}$, $f'(x)$ é positiva e então, f é crescente em $[\sqrt{7/3}, +\infty)$.

Pelo critério da derivada primeira concluímos que f tem um máximo relativo em $-\sqrt{7/3}$ e f tem um mínimo relativo em $+\sqrt{7/3}$.

A Figura 5.14 mostra um esboço do gráfico de f.

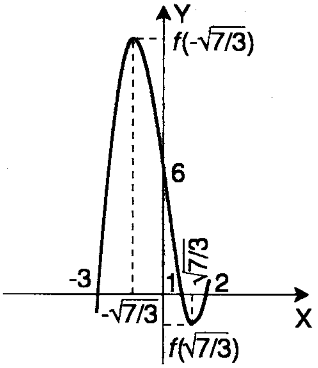


Figura 5-14

(*ii*) Seja

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 - 3, & \text{se } x \leq 5 \\ 1/2\,(x+7), & \text{se } x > 5. \end{cases}$$

Se $x < 5$, temos $f'(x) = 2\,(x-2)$ e se $x > 5$ temos $f'(x) = 1/2$.

Ainda $f'_+(5) = 1/2$ e $f'_-(5) = 6$. Logo, $f'(5)$ não existe e então 5 é um ponto crítico de f.

O ponto $x = 2$ também é ponto crítico, pois $f'(2) = 0$.

Se $x < 2$, $f'(x)$ é negativa. Então pela proposição 5.6.3, f é decrescente em $(-\infty, 2]$.

Se $2 < x < 5$, $f'(x)$ é positiva. Então f é crescente em $[2, 5]$.

Se $x > 5$, $f'(x)$ é positiva. Então f é crescente em $[5, +\infty)$.

Pelo critério da derivada primeira, concluímos que f tem um mínimo relativo em $x = 2$.

Apresentamos o gráfico de f na Figura 5.15.

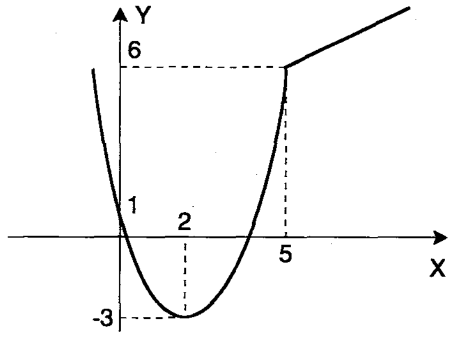


Figura 5-15

5.7.3 Teorema (Critério da derivada 2ª para determinação de extremos de uma função). Sejam f uma função derivável num intervalo (a, b) e c um ponto crítico de f neste intervalo, isto é, $f'(c) = 0$, com $a < c < b$. Se f admite a derivada f'' em (a, b), temos:

(*i*) Se $f''(c) < 0$, f tem um valor máximo relativo em c.

(*ii*) Se $f''(c) > 0$, f tem um valor mínimo relativo em c.

Prova. Para provar este teorema utilizaremos o seguinte resultado que não foi mencionado no Capítulo 3. "Se $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe e é negativo, existe um intervalo aberto contendo a tal que $f(x) < 0$ para todo $x \neq a$ no intervalo".

Prova de (*i*). Por hipótese $f''(c)$ existe e $f''(c) < 0$. Então,

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0 .$$

Portanto, existe um intervalo aberto I, contendo c, tal que

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0 , \quad \text{para todo } x \in I. \qquad (I)$$

Seja A o intervalo aberto que contém todos os pontos $x \in I$ tais que $x < c$. Então, c é o extremo direito do intervalo aberto A.

Seja B o intervalo aberto que contém todos os pontos $x \in I$ tais que $x > c$. Assim, c é o extremo esquerdo do intervalo aberto B.

Se $x \in A$, temos $x - c < 0$. De (*1*), resulta que $f'(x) > f'(c)$.

Se $x \in B$, $x - c > 0$. De (*1*), resulta que $f'(x) < f'(c)$.

Como $f'(c) = 0$, concluímos que se $x \in A, f'(x) > 0$ e se $x \in B, f'(x) < 0$. Pelo critério da derivada primeira (teorema 5.7.1), f tem um valor máximo relativo em c.

A prova de (*ii*) é análoga.

5.7.4 Exemplos. Encontre os máximos e os mínimos relativos de f aplicando o critério da derivada segunda.

(*i*) $f(x) = 18x + 3x^2 - 4x^3$.

Temos,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 18 + 6x - 12x^2 \\ \text{e} \quad f''(x) &= 6 - 24x. \end{aligned}$$

Fazendo $f'(x) = 0$, temos $18 + 6x - 12x^2 = 0$. Resolvendo esta equação obtemos os pontos críticos de f que são $3/2$ e -1.

Como $f''(3/2) = -30 < 0$, f tem um valor máximo relativo em $3/2$.

Como $f''(-1) = 30 > 0$, f tem um valor mínimo relativo em -1.

(*ii*) $f(x) = x\,(x - 1)^2$.

Neste exemplo, temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= x \cdot 2\,(x-1) + (x-1)^2 \cdot 1 \\ &= 3x^2 - 4x + 1 \end{aligned}$$

$$\text{e} \quad f''(x) = 6x - 4.$$

Fazendo $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0$ e resolvendo a equação obtemos os pontos críticos de f, que neste caso são 1 e 1/3.

Como $f''(1) = 2 > 0$, f tem um valor mínimo relativo em 1. Como $f''(1/3) = -2 < 0$, f tem um valor máximo relativo em 1/3.

(*iii*) $f(x) = 6x - 3x^2 + \frac{1}{2}x^3$.

Temos,

$$f'(x) = 6 - 6x + \frac{3}{2}x^2.$$

$$\text{e} \quad f''(x) = -6 + 3x.$$

Fazendo $f'(x) = 0$, temos $6 - 6x + \frac{3}{2}x^2 = 0$. Resolvendo a equação, obtemos $x = 2$ que neste caso é o único ponto crítico de f.

Como $f''(2) = 0$ nada podemos afirmar com auxílio do teorema 5.7.3.

Usando o critério da derivada primeira, concluímos que esta função é sempre crescente. Portanto não existem máximos nem mínimos relativos.

5.8 CONCAVIDADE E PONTOS DE INFLEXÃO

O conceito de concavidade é muito útil no esboço do gráfico de uma curva.

Vamos introduzi-lo, analisando geometricamente a Figura 5.16.

Na Figura 5.16(a) observamos que dado um ponto qualquer c entre a e b, em pontos próximos de c o gráfico de f está acima da tangente à curva no ponto $P\ (c, f(c))$. Dizemos que a curva tem concavidade voltada para cima no intervalo (a, b).

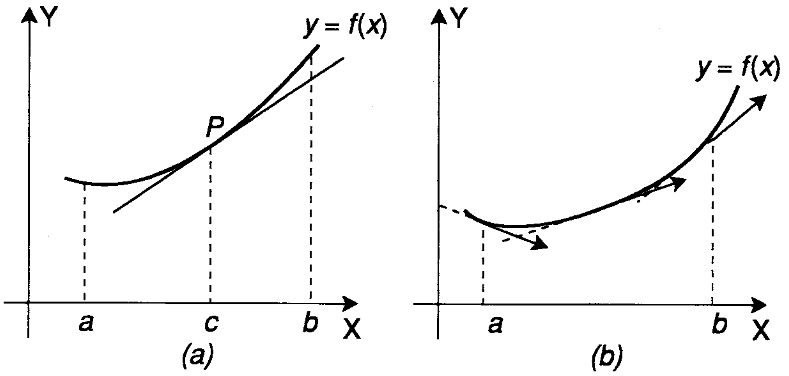


Figura 5-16

Como $f'(x)$ é a inclinação da reta tangente à curva, observa-se na Figura 5.16(*b*), que podemos descrever esta mesma situação afirmando que no intervalo (a, b) a derivada $f'(x)$ é crescente. Geometricamente, isto significa que a reta tangente gira no sentido anti-horário à medida que avançamos sobre a curva da esquerda para a direita.

Analogamente, a Figura 5.17 descreve uma função que tem concavidade voltada para baixo no intervalo (a, b).

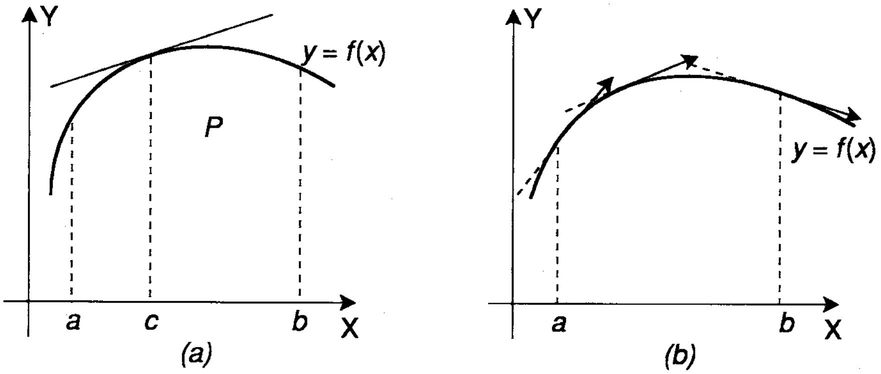


Figura 5-17

Na Figura 5.17(*b*) vemos que a tangente gira no sentido horário quando nos deslocamos sobre a curva da esquerda para a direita. A derivada $f'(x)$ é decrescente em (a, b).

Temos as seguintes definições:

5.8.1 Definição. Uma função f é dita côncava para cima no intervalo (a, b), se $f'(x)$ é crescente neste intervalo.

5.8.2 Definição. Uma função f é côncava para baixo no intervalo (a, b), se $f'(x)$ for decrescente neste intervalo.

Reconhecer os intervalos onde uma curva tem concavidade voltada para cima ou para baixo, auxilia muito no traçado de seu gráfico. Faremos isso, analisando o sinal da derivada $f''(x)$.

5.8.3 Proposição. Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável até 2ª ordem no intervalo (a, b):

(*i*) Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é côncava para cima em (a, b).

(*ii*) Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é côncava para baixo em (a, b).

Prova. (*i*). Como $f''(x) = [f'(x)]'$, se $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, pela proposição 5.6.3, $f'(x)$ é crescente no intervalo (a, b). Logo, f é côncava para cima em (a, b).

Analogamente, se prova (*ii*).

Podem existir pontos no gráfico de uma função nos quais a concavidade muda de sentido. Esses pontos são chamados *pontos de inflexão.*

5.8.4 Definição. Um ponto $P(c, f(c))$ do gráfico de uma função contínua f é chamado um ponto de inflexão, se existe um intervalo (a, b) contendo c, tal que uma das seguintes situações ocorra:

(*i*) f é côncava para cima em (a, c) e côncava para baixo em (c, b).

(*ii*) f é côncava para baixo em (a, c) e côncava para cima em (c, b).

Na Figura 5.18, os pontos de abscissa c_1, c_2, c_3 e c_4 são pontos de inflexão. Vale observar que c_2 e c_3 são pontos de extremos de f e que f não é derivável nestes

pontos. Nos pontos c_1 e c_4, existem as derivadas $f'(c_1)$ e $f'(c_4)$. Nos correspondentes pontos $(c_1, f(c_1))$ e $(c_4, f(c_4))$ a reta tangente corta o gráfico de f.

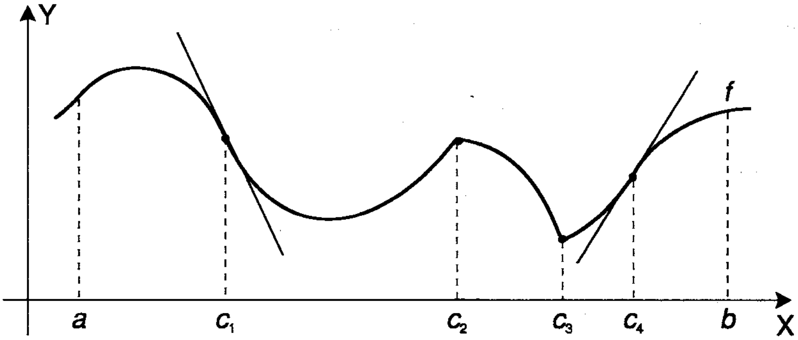


Figura 5-18

5.8.5 Exemplos. Determinar os pontos de inflexão e reconhecer os intervalos onde as funções seguintes tem concavidade voltada para cima ou para baixo.

(*i*) $f(x) = (x-1)^3$.

Temos

$$f'(x) = 3(x-1)^2$$

e $$f''(x) = 6(x-1).$$

Fazendo $f''(x) > 0$, temos as seguintes desigualdades equivalentes

$$6(x-1) > 0$$

$$x-1 > 0$$

$$x > 1.$$

Portanto, no intervalo $(1, +\infty)$, $f''(x) > 0$. Analogamente, no intervalo $(-\infty, 1)$, $f''(x) < 0$. Pela proposição 5.8.3 f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, 1)$ e no intervalo $(1, +\infty)$ f é côncava para cima.

No ponto $c = 1$ a concavidade muda de sentido. Logo, neste ponto, o gráfico de f tem um ponto de inflexão.

Podemos ver o gráfico de f na Figura 5.19.

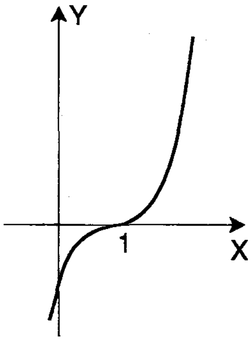


Figura 5-19

(*ii*) $f(x) = x^4 - x^2$.

Temos,

$$f'(x) = 4x^3 - 2x$$

e $$f''(x) = 12x^2 - 2.$$

Fazendo $f''(x) > 0$, vem

$$12x^2 - 2 > 0$$
$$x^2 > 1/6.$$

Então, $x > \dfrac{\sqrt{6}}{6}$ ou $x < -\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

Portanto, f tem concavidade para cima nos intervalos

$$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right), \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, +\infty\right)..$$

No intervalo $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, $f''(x) < 0$. Portanto, neste intervalo f é côncava para baixo.

Nos pontos $c_1 = \dfrac{-\sqrt{6}}{6}$ e $c_2 = \dfrac{+\sqrt{6}}{6}$ a concavidade muda de sentido. Logo, nestes pontos o gráfico de f tem pontos de inflexão.

A Figura 5.20 mostra o gráfico de f onde assinalamos os pontos de inflexão.

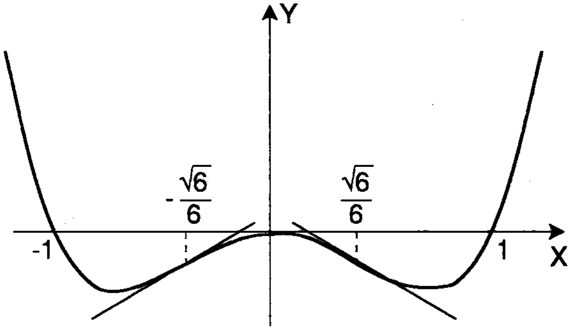


Figura 5-20

$$(iii)\ f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad \text{para } x \le 1 \\ 1-(x-1)^2, & \quad \text{para } x > 1\,. \end{cases}$$

Para $x < 1$, $f'(x) = 2x$ e $f''(x) = 2$. Para $x > 1$, $f'(x) = -2(x-1)$ e $f''(x) = -2$. Logo, para $x \in (-\infty, 1)$, $f''(x) > 0$ e portanto f é côncava para cima neste intervalo. No intervalo $(1, +\infty)$, $f''(x) < 0$. Portanto, neste intervalo f é côncava para baixo.

No ponto $c = 1$, a concavidade muda de sentido e assim o gráfico de f apresenta um ponto de inflexão em $c = 1$.

O gráfico de f pode ser visto na Figura 5.21. Observamos que no ponto $c = 1, f$ tem um máximo relativo.

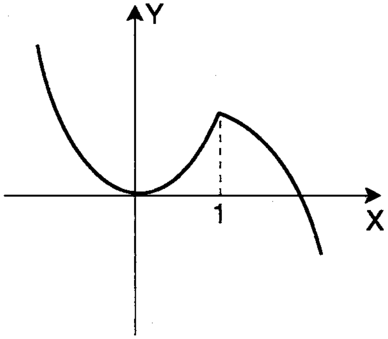


Figura 5-21

5.9 ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS E VERTICAIS

Em aplicações práticas, encontramos com muita freqüência gráficos que se aproximam de *uma reta* a medida que x cresce ou decresce (ver Figuras 5.22 e 5.23).

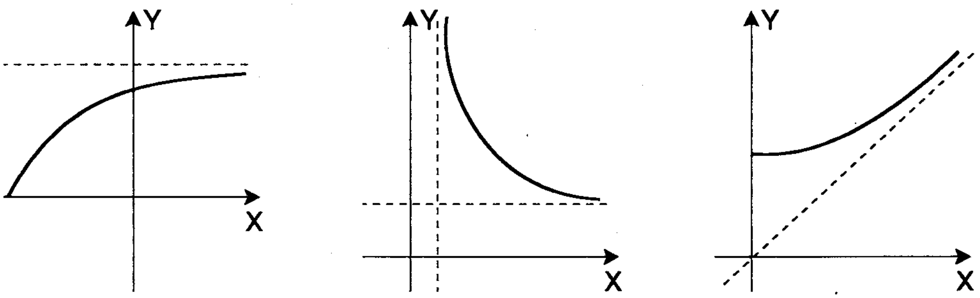


Figura 5-22

Estas retas são chamadas *assíntotas*.

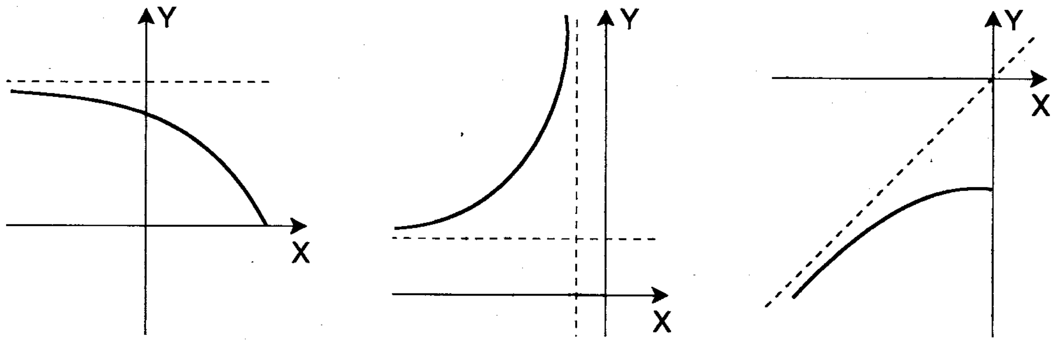


Figura 5-23

Particularmente, vamos analisar com um pouco mais de atenção as *assíntotas horizontais* e as *verticais*.

5.9.1 Definição. A reta $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico de $y = f(x)$, se pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

(*i*) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

(*ii*) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

(*iii*) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

(*iv*) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$.

5.9.2 Exemplo. A reta $x = 2$ é uma assíntota vertical do gráfico de

$$y = \frac{1}{(x-2)^2} .$$

De fato, $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{(x-2)^2} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$, ou também,

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

A Figura 5.24 ilustra este exemplo.

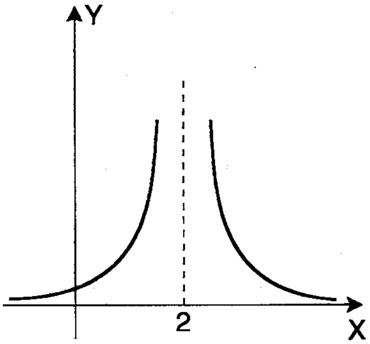


Figura 5-24

5.9.3 Definição. A reta $y = b$ é uma assíntota horizontal do gráfico de $y = f(x)$, se pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

(*i*) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$

(*ii*) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

5.9.4 Exemplo. As retas $y = 1$ e $y = -1$ são assíntotas horizontais do gráfico de

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}},$$

porque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 2}} = 1$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 2}} = -1$ (ver Figura 5.25) .

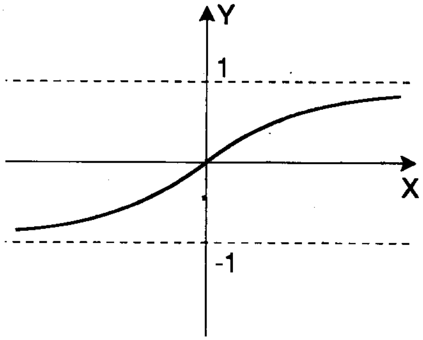


Figura 5-25

5.10 ESBOÇO DE GRÁFICOS

Utilizando todos os itens citados na análise do comportamento de uma função, podemos fazer um resumo de atividades que nos levarão ao esboço de gráficos.

ETAPAS	*PROCEDIMENTO*	*DEFINIÇÕES E TEOREMAS UTILIZADOS*
1ª	Encontrar $D(f)$	
2ª	Calcular os pontos de intersecção com os eixos. (Quando não requer muito cálculo.)	
3ª	Encontrar os pontos críticos	Seção 5.4.
4ª	Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento de $f(x)$	Proposição 5.6.3.

ETAPAS	*PROCEDIMENTO*	*DEFINIÇÕES E TEOREMAS UTILIZADOS*
5ª	Encontrar os máximos e mínimos relativos.	Teoremas 5.7.1 ou 5.7.3.
6ª	Determinar a concavidade e os pontos de inflexão de f.	Proposição 5.8.3.
7ª	Encontrar as assíntotas horizontais e verticais se existirem.	Definições 5.9.1 e 5.9.3.
8ª	Esboçar o gráfico.	

5.10.1 Exemplos. Esboçar o gráfico das funções:

(*i*) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$.

Seguindo as etapas propostas temos:

1ª etapa. $D(f) = \mathbb{R}$.

2ª etapa. Intersecção com o eixo dos y.

$f(0) = 2$.

3ª etapa. $f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x$.

Resolvendo $12x^3 - 24x^2 + 12x = 0$, encontramos $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$ que são os pontos críticos.

4ª etapa. Fazendo $f'(x) > 0$, obtemos que $12x^3 - 24x^2 + 12x > 0$ quando $x > 0$. Portanto, f é crescente para $x \geq 0$.

Fazendo $f'(x) < 0$, obtemos que $12x^3 - 24x^2 + 12x < 0$ quando $x < 0$. Portanto, f é decrescente para $x \leq 0$.

5ª etapa. Temos $f''(x) = 36x^2 - 48x + 12$.

Como $f''(0) = 12 > 0$, temos que o ponto 0 é um ponto de mínimo e $f(0) = 2$ é um mínimo relativo de f.

Como $f''(1) = 0$, nada podemos afirmar.

6ª etapa. Fazendo $f''(x) > 0$, temos que $36x^2 - 48x + 12 > 0$ quando $x \in [(-\infty, 1/3) \cup (1, +\infty)]$.

Então, f é côncava para cima em $(-\infty, 1/3) \cup (1, +\infty)$.

Fazendo $f''(x) < 0$, temos que $36x^2 - 48x + 12 < 0$ para $x \in (1/3, 1)$. Então f é côncava para baixo em $(1/3, 1)$.

Os pontos de abscissa 1/3 e 1 são pontos de inflexão.

7ª etapa. Não existem assíntotas.

8ª etapa. Temos na Figura 5.26 o esboço do gráfico.

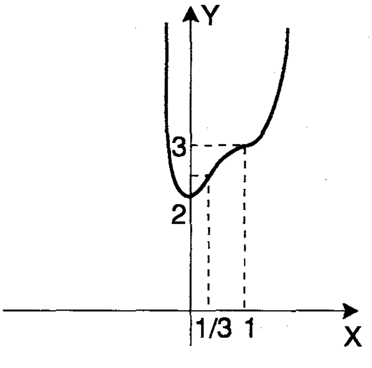


Figura 5-26

(*ii*) $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 3}$.

O domínio de f é $D(f) = \mathbb{R} - \{3\}$.

Temos,

$$f'(x) = \frac{x(x-6)}{(x-3)^2}$$

e

$$f''(x) = \frac{18x - 54}{(x-3)^4}.$$

Fazendo $f'(x) = 0$, temos

$$\frac{x(x-6)}{(x-3)^2} = 0$$

e então, $x = 0$ e $x = 6$ são pontos críticos.

Vemos que $f'(x) > 0$ quando $x \in [(-\infty, 0) \cup (6, +\infty)]$. Assim, f é crescente em $(-\infty, 0] \cup [6, +\infty)$. Fazendo $f'(x) < 0$, vemos que f é decrescente em $[0, 6]$.

Como $f''(0) < 0$, temos que 0 é ponto de máximo relativo e como $f''(6) > 0$, temos que 6 é ponto de mínimo relativo.

Ainda $f(0) = 0$ é o máximo relativo de f e $f(6) = 12$ é o mínimo relativo de f.

Fazendo

$$f''(x) = \frac{18x - 54}{(x-3)^4} > 0,$$

obtemos que f é côncava para cima em $(3, +\infty)$ e fazendo

$$f''(x) = \frac{18x - 54}{(x-3)^4} < 0,$$

obtemos que f é côncava para baixo em $(-\infty, 3)$.

Determinando os limites

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{0^+} = +\infty$$

e

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{0^-} = -\infty$$

encontramos que $x = 3$ é assíntota vertical. Não existe assíntota horizontal.

A Figura 5.27 mostra o esboço do gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$.

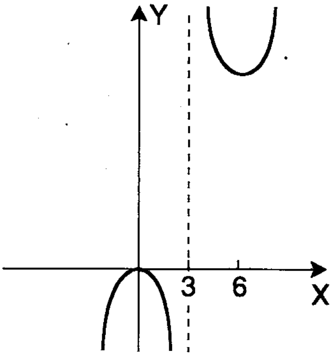


Figura 5-27

(*iii*) $f(x) = (x + 1)^{1/3}$.

O domínio de $f(x)$ é $D(f) = \mathbb{R}$.

$f(x)$ corta o eixo dos y no ponto $y = 1$ já que $f(0) = 1$. Corta o eixo dos x em -1 já que resolvendo $(x + 1)^{1/3} = 0$, obtemos $x = -1$.

Fazendo

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x + 1)^{-2/3} = 0,$$

concluímos que não existe x que satisfaça $f'(x) = 0$. Como $f'(-1) \nexists$, o único ponto crítico de f é $x = -1$.

Como $f'(x)$ é sempre positiva concluímos que a função é sempre crescente. Não existem máximos nem mínimos.

Como

$$f''(x) = \frac{-2}{9}(x+1)^{-5/3},$$

concluímos que para $x < -1$, $f''(x) > 0$ e portanto f é côncava para cima em $(-\infty, -1)$. Quando $x > -1$, $f''(x) < 0$ e então f é côncava para baixo em $(-1, +\infty)$.

O ponto de abscissa $x = -1$ é um ponto de inflexão.

Não existem assíntotas.

A Figura 5.28 mostra o gráfico de $f(x)$.

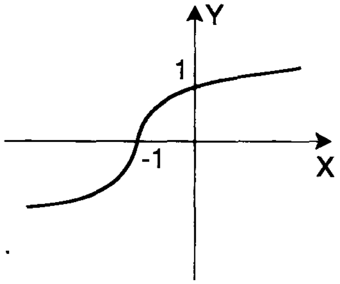


Figura 5-28

5.11 EXERCÍCIOS

1. Em cada um dos seguintes casos, verificar se o Teorema do Valor Médio se aplica. Em caso afirmativo, achar um número c em (a, b), tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Interpretar geometricamente.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $a = 2$, $b = 3$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $a = -1$, $b = 3$.

c) $f(x) = x^3$; $a = 0$, $b = 4$.

d) $f(x) = x^3$; $a = -2$, $b = 0$.

e) $f(x) = \cos x$; $a = 0$, $b = \pi/2$.

f) $f(x) = \text{tg}\, x$; $a = \pi/4$, $b = 3\pi/4$.

g) $f(x) = \text{tg}\, x$; $a = 0$; $b = \pi/4$.

h) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$; $a = -1$, $b = 0$.

i) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $a = -1$, $b = 1$.

j) $f(x) = |x|$; $a = -1$, $b = 1$.

2. A função $f(x) = x^{2/3} - 1$ é tal que $f(-1) = f(1) = 0$. Por que ela não verifica o Teorema de Rolle no intervalo $[-1, 1]$?

3. Seja $f(x) = -x^4 + 8x^2 + 9$. Mostrar que f satisfaz as condições do Teorema de Rolle no intervalo $[-3, 3]$ e determinar os valores de $c \in (-3, 3)$ que satisfaçam $f'(c) = 0$.

4. Usando o teorema do valor médio provar que:

a) $|\text{sen}\,\theta - \text{sen}\,\alpha| \leq |\theta - \alpha|$, $\forall\ \theta, \alpha \in \mathbb{R}$;

b) $\text{sen}\,\theta \leq \theta$, $\theta \geq 0$.

5. Determinar os pontos críticos das seguintes funções, se existirem.

a) $y = 3x + 4$

b) $y = x^2 - 3x + 8$

c) $y = 2 + 2x - x^2$

d) $y = (x - 2)(x + 4)$

e) $y = 3 - x^3$

f) $y = x^3 + 2x^2 + 5x + 3$

g) $y = x^4 + 4x^3$

h) $y = \text{sen}\, x$

i) $y = \cos x$

j) $y = \text{sen}\, x - \cos x$

k) $y = e^x - x$

l) $y = (x^2 - 9)^{2/3}$

m) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

n) $y = |2x - 3|$

o) $f(x) = \begin{cases} x\,, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

6. Determinar os intervalos nos quais as funções seguintes são crescentes ou decrescentes.

a) $f(x) = 2x - 1$

b) $f(x) = 3 - 5x$

c) $f(x) = 3x^2 + 6x + 7$

d) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 2$

e) $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$

f) $f(x) = \dfrac{x}{2} + \text{sen}\, x$

g) $f(x) = 2^x$

h) $f(x) = e^{-x}$

i) $f(x) = x\, e^{-x}$

j) $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$

k) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

l) $f(x) = e^x\, \text{sen}\, x\,,\ x \in [0, 2\pi]$.

7. Determinar os máximos e mínimos das seguintes funções, nos intervalos indicados.

a) $f(x) = 1 - 3x\,,\ [-2, 2]$

b) $f(x) = x^2 - 4\,,\ [-1, 3]$

c) $f(x) = 4 - 3x + 3x^2\,,\ [0, 3]$

d) $f(x) = x^3 - x^2\,,\ [0, 5]$

e) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}\,,\ [-2, 2]$

f) $f(x) = |x - 2|\,,\ [1, 4]$

g) $f(x) = \cosh x\,,\ [-2, 2]$

h) $f(x) = \text{tgh}\, x\,,\ [-2, 2]$

i) $f(x) = \cos 3x$, $[0, 2\pi]$

j) $f(x) = \cos^2 x$, $[0, 2\pi]$

k) $f(x) = \operatorname{sen}^3 x - 1$, $[0, \pi/2]$.

8. Encontrar os intervalos de crescimento, decrescimento, os máximos e os mínimos relativos das seguintes funções.

a) $f(x) = 2x + 5$

b) $f(x) = 3x^2 + 6x + 1$

c) $g(x) = 4x^3 - 8x^2$

d) $h(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 6x + 5$

e) $f(t) = \dfrac{t-1}{t+1}$

f) $f(t) = t + \dfrac{1}{t}$

g) $g(x) = x\,e^x$

h) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

i) $f(x) = |2 - 6x|$

j) $g(x) = \begin{cases} x + 4, & x \leq -2 \\ x^2 - 2, & x > -2 \end{cases}$

k) $h(t) = \begin{cases} 3 - 4t, & t > 0 \\ 4t + 3, & t \leq 0 \end{cases}$

l) $f(x) = \begin{cases} 1 + x, & x < -1 \\ 1 - x^2, & x \geq -1 \end{cases}$

m) $g(x) = \begin{cases} 10 - (x-3)^2, & x \leq -2 \\ 5(x-1), & -2 < x \leq -1 \\ -\sqrt{91 + (x-2)^2}, & x > -1 \end{cases}$

9. Encontrar os pontos de máximo e mínimo relativos das seguintes funções, se existirem.

a) $f(x) = 7x^2 - 6x + 3$

b) $g(x) = 4x - x^2$

c) $h(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 7x + 9$

d) $h(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{5}{3}x^3 + 4x^2 - 4x + 8$

e) $f(t) = \begin{cases} t^2, & t < 0 \\ 3t^2, & t \geq 0 \end{cases}$

f) $f(x) = 6x^{2/3} - 2x$

g) $f(x) = 5 + (x - 2)^{7/5}$

h) $f(x) = 3 + (2x + 3)^{4/3}$

i) $g(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 4}$

j) $h(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 2x + 2}$

k) $f(x) = (x + 2)^2 (x - 1)^3$

l) $f(x) = x^2 \sqrt{16 - x}$.

10. Mostrar que $y = \dfrac{\log_a x}{x}$ tem seu valor máximo em $x = e$ (número neperiano) para todos os números $a > 1$.

11. Determinar os coeficientes a e b de forma que a função $f(x) = x^3 + a\,x^2 + b$ tenha um extremo relativo no ponto $(-2, 1)$.

12. Encontrar a, b, c e d tal que a função $f(x) = 2ax^3 + bx^2 - cx + d$ tenha pontos críticos em $x = 0$ e $x = 1$. Se $a > 0$, qual deles é de máximo, qual é de mínimo?

13. Demonstrar que a função $y = a\,x^2 + b\,x + c$, $x \in \mathbb{R}$, tem máximo se, e somente se, $a < 0$; e mínimo se, e somente se, $a > 0$.

14. Determinar os pontos de inflexão e reconhecer os intervalos onde as funções seguintes tem concavidade voltada para cima ou para baixo.

a) $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 6x$

b) $f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 10x + 9$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x + 4}$

d) $f(x) = 2x\,e^{-3x}$

e) $f(x) = x^2 e^x$

f) $f(x) = 4\sqrt{x + 1} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} x^2 - 1$

g) $f(t) = \dfrac{t^2 + 9}{(t - 3)^2}$

h) $f(t) = e^{-t} \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$

i) $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$

j) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq 2 \\ 4 - x^2, & x > 2 \end{cases}$

15. Determinar as assíntotas horizontais e verticais do gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{4}{x-4}$

b) $f(x) = \dfrac{-3}{x+2}$

c) $f(x) = \dfrac{4}{x^2 - 3x + 2}$

d) $f(x) = \dfrac{-1}{(x-3)(x+4)}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$

f) $f(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{x-3}}$

g) $f(x) = \dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2-16}}$

h) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x-12}}$

i) $f(x) = e^{1/x}$

j) $f(x) = e^x - 1$

k) $f(x) = \ln x$.

16. Esboçar o gráfico das seguintes funções:

a) $y = x^2 + 4x + 2$

b) $y = (x-3)(x+2)$

c) $y = \dfrac{-x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} - 2x + \dfrac{5}{6}$

d) $y = x^3 - \dfrac{9}{2}x^2 - 12x + 3$

e) $y = \dfrac{-1}{4}x^4 + \dfrac{5}{3}x^3 - 2x^2$

f) $y = x^4 - 32x + 48$

g) $y = x + \dfrac{2}{x}$

h) $y = \dfrac{2x}{x+2}$

i) $y = \dfrac{3x+1}{(x+2)(x-3)}$

j) $y = \dfrac{2}{x^2 - 2x - 3}$

k) $y = \dfrac{4}{\sqrt{x+2}}$

l) $y = \cosh x$

m) $y = x^{3/2}$

n) $y = e^{x-x^2}$

o) $y = \ln(2x+3)$

p) $y = \ln(x^2+1)$.

5.12 PROBLEMAS DE MAXIMIZAÇÃO E MINIMIZAÇÃO

A seguir apresentamos alguns problemas práticos em diversas áreas, onde aplicamos o que foi visto nas Seções 5.4 e 5.7 sobre máximos e mínimos.

O primeiro passo para solucionar estes problemas é escrever precisamente qual a função que deverá ser analisada. Esta função poderá ser escrita em função de uma ou mais variáveis. Quando a função é de mais de uma variável devemos procurar expressar uma das variáveis em função da outra.

Com a função bem definida, devemos identificar um intervalo apropriado e então proceder a rotina matemática aplicando definições e teoremas.

5.12.1 Exemplos

(*1*) Na Biologia, encontramos a fórmula $\phi = V \cdot A$, onde ϕ é o fluxo de ar na traquéia, V é a velocidade do ar e A a área do círculo formado ao seccionarmos a traquéia (ver Figura 5.29).

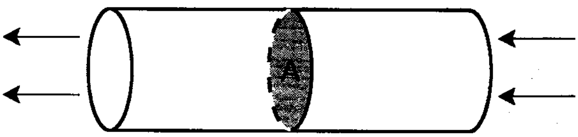


Figura 5-29

Quando tossimos, o raio diminui, afetando a velocidade do ar na traquéia. Sendo r_0 o raio normal da traquéia, a relação entre a velocidade V e o raio r da traquéia durante a tosse é dada por $V(r) = a \cdot r^2 (r_0 - r)$, onde a é uma constante positiva.

(a) Calcular o raio r em que é maior a velocidade do ar.

(b) Calcular o valor de r com o qual teremos o maior fluxo possível.

Solução.

(a) O raio r da traquéia contraída não pode ser maior que o raio normal r_0, nem menor que zero, ou seja, $0 \leq r \leq r_0$.

Neste item vamos encontrar o máximo absoluto da função $V(r)$ em $0 \leq r \leq r_0$.

Temos,

$$V(r) = a\,r^2(r_0 - r);$$
$$V\,'(r) = 2a\,r_0\,r - 3a\,r^2.$$

Fazendo $V\,'(r) = 2a\,r_0\,r - 3a\,r^2 = 0$, obtemos os pontos críticos $r_1 = \dfrac{2}{3}\,r_0$ e $r_2 = 0$.

Temos $V\,''(r) = 2a\,r_0 - 6a\,r$. Como $V\,''(0) = 2a\,r_0 > 0$, concluímos que $r_2 = 0$ é um mínimo relativo. Como $V\,''(2/3\;r_0)$ é um valor negativo, concluímos que $r_1 = 2/3\;r_0$ é um valor máximo relativo.

Para $r \in [0, r_0]$, temos que o máximo absoluto é $V(2/3r_0) = 4a/27r_0^3$.

Diante deste resultado afirmamos que a velocidade do ar na traquéia é maior quando o raio r da mesma, é dois terços do raio r_0 da traquéia não contraída.

(b) Podemos escrever a função $\phi = V \cdot A$ em função do raio r da traquéia:

$\phi(r) = ar^2\,(r_0 - r) \cdot \pi\,r^2.$

Queremos encontrar o máximo absoluto da função $\phi(r)$ em $0 \leq r \leq r_0$.

Temos, $\phi'(r) = 4a\,\pi\,r_0\,r^3 - 5a\,\pi\,r^4$.

Fazendo $\phi'(r) = 4a\,\pi\,r_0\,r^3 - 5a\,\pi\,r^4 = 0$, obtemos $r_1 = 0$ e $r_2 = 4/5\;r_0$ como pontos críticos de $\phi(r)$.

Temos $\phi''(r) = 12a\,\pi\, r_0\, r^2 - 20a\,\pi\, r^3$.

Logo, $\phi''(0) = 0$ e $\phi''(4/5\, r_0) = -64/25\, a\,\pi\, r_0^3$. Concluímos que em $4/5\, r_0$ temos um ponto de máximo relativo.

O ponto $r_1 = 0$ é um ponto de mínimo relativo, pois a função $\phi(r)$ decresce em $(-\infty, 0]$ e cresce em $[0, 4/5\, r_0]$.

O máximo absoluto em $[0, r_0]$ será $\phi(4/5\, r_0)$ que é igual à $256/3125\, a\,\pi\, r_0^5$.

Portanto, o maior fluxo possível é obtido quando $r = 4/5\, r_0$.

(2) Uma rede de água potável ligará uma central de abastecimento situada à margem de um rio de 500 metros de largura a um conjunto habitacional situado na outra margem do rio, 2000 metros abaixo da central. O custo da obra através do rio é de Cr$ 640,00 por metro, enquanto, em terra, custa Cr$ 312,00. Qual é a forma mais econômica de se instalar a rede de água potável?

Solução. A Figura 5.30 esquematiza a função que dará o custo da obra:

$$f(x) = (2000 - x) \cdot 312{,}00 + \sqrt{x^2 + 500^2} \cdot 640{,}00.$$

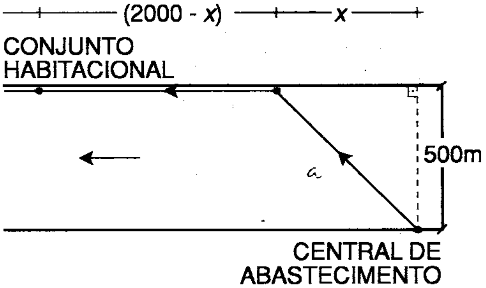


Figura 5-30

Nosso objetivo será calcular o mínimo absoluto dessa função para $0 \leq x \leq 2000$.

Temos,

$$f'(x) = -312{,}00 + \frac{640{,}00\,x}{\sqrt{x^2 + 500^2}}.$$

Resolvendo a equação

$$-312{,}00 + \frac{640{,}00x}{\sqrt{x^2 + 500^2}} = 0,$$

obtemos que $x \cong 279{,}17$ m é um ponto crítico.

Temos,

$$f''(x) = \frac{500^2 \cdot 640{,}00}{(x^2 + 500^2)^{3/2}}.$$

Como $f''(279{,}17) > 0$, temos que $x = 279{,}17$ é um ponto de mínimo relativo. Resta-nos saber se este mínimo é absoluto no intervalo $0 \le x \le 2000$.

Como o único ponto crítico de f no intervalo aberto $(0, 2000)$ é $x \cong 279{,}17$, este ponto é mínimo absoluto neste intervalo. Como $f(0) > f(279{,}17)$ e $f(2000) > f(279{,}17)$, concluímos que a obra poderá ser realizada com o menor custo possível se a canalização de água alcançar o outro lado do rio 279,17 m abaixo da central de abastecimento.

(*3*) Um galpão deve ser construído tendo uma área retangular de 12100 m^2. A prefeitura exige que exista um espaço livre de 25 m na frente, 20 m atrás e 12 m em cada lado. Encontre as dimensões do lote que tenha a área mínima na qual possa ser construído este galpão.

Solução. A Figura 5.31 ajuda a definir a função que vamos minimizar.

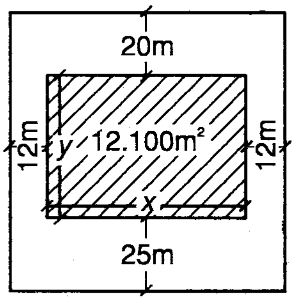


Figura 5-31

Sabemos que $A = 12100 \text{ m}^2 = x \cdot y$. (*1*)

A função que definirá a área do lote é

$$\begin{aligned} S &= (x + 12 + 12)(y + 25 + 20) \\ &= (x + 24)(y + 45). \end{aligned} \quad (2)$$

De (*1*), obtemos que $y = \dfrac{12100}{x}$. Substituindo em (*2*), vem

$$S(x) = (x + 24)\left(\frac{12100}{x} + 45\right).$$

Esta é a função que queremos minimizar.

Temos,

$$S'(x) = \frac{45x^2 - 290400}{x^2}.$$

Resolvendo a equação $= \dfrac{45x^2 - 290400}{x^2} = 0$, obtemos que $x = \dfrac{44\sqrt{30}}{3}$ é um ponto crítico. (x é uma medida e portanto consideramos só o valor positivo.)

Temos que $S''(x) = \dfrac{580800}{x^3}$ e portanto $S''\left(\dfrac{44\sqrt{30}}{3}\right) > 0$. $x = \dfrac{44\sqrt{30}}{3}$ é um ponto de mínimo.

Fazendo $x = \dfrac{44\sqrt{30}}{3} \cong 80{,}33$ m, obtemos que

$$y = \frac{12100}{x} = \frac{12100}{44\sqrt{30}/3} \cong 150{,}62 \text{ m},$$

e então, a área mínima é obtida quando as dimensões do lote forem aproximadamente $(80{,}33 + 24)$ m $\times$ $(150{,}62 + 45)$ m.

(*4*) Uma caixa sem tampa, de base quadrada, deve ser construída de forma que o seu volume seja $2500\ m^3$. O material da base vai custar Cr\$ 1200,00 por m^2 e o material dos lados Cr\$ 980,00 por m^2. Encontre as dimensões da caixa de modo que o custo do material seja mínimo.

Solução.

Observando a Figura 5.32, escrevemos a função que dá o custo do material:

$$C = x^2 \cdot 1200{,}00 + 4xy \cdot 980{,}00. \qquad (1)$$

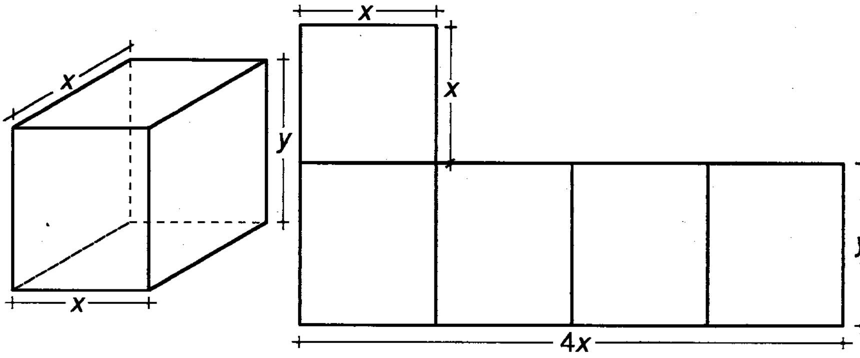


Figura 5-32

Como $V = x^2y = 2500\ cm^3$, temos que a dimensão y pode ser escrita como $y = 2500/x^2$.

Substituindo esse resultado em (*1*), obtemos

$$C\ (x) = 1200{,}00 \cdot x^2 + 9.800.000{,}00/x,$$

que é a função que queremos minimizar.

Temos,

$$C'(x) = \frac{2400{,}00x^3 - 9.800.000{,}00}{x^2}.$$

Resolvendo a equação $\frac{2400{,}00x^3 - 9.800.000{,}00}{x^2} = 0$, encontramos

$$x = 5\sqrt[3]{\frac{98}{3}} \cong 15{,}983\,\text{m}, \text{ que é o ponto crítico que nos interessa.}$$

De fato, para $x \cong 15{,}983$ vamos ter um ponto de mínimo, já que $C''(15{,}983) > 0$.

Portanto, as dimensões da caixa de modo a obter o menor custo possível são $x \cong 15{,}983$ m e $y \cong 9{,}785$ m.

5.13 EXERCÍCIOS

1. Um fio de comprimento l é cortado em dois pedaços. Com um deles se fará um círculo e com o outro um quadrado.

   a) Como devemos cortar o fio a fim de que a soma das duas áreas compreendidas pelas figuras seja mínima?

   b) Como devemos cortar o fio a fim de que a soma das áreas compreendidas seja máxima?

2. Determinar o ponto P situado sobre o gráfico da hipérbole $xy = 1$, que está mais próximo da origem.

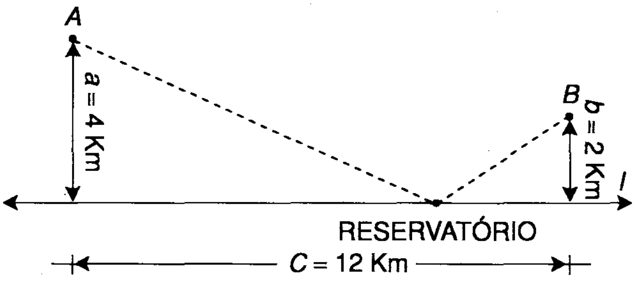
3. Um fazendeiro tem 200 bois, cada um pesando 300 kg. Até agora ele gastou Cr$ 380.000,00 para criar os bois e continuará gastando Cr$ 2,00 por dia para manter um boi. Os bois aumentam de peso a uma razão de 1,5 kg por dia. Seu preço de venda, hoje, é de Cr$ 18,00 o quilo, mas o preço cai 5 centavos por dia. Quantos dias deveria o fazendeiro aguardar para maximizar seu lucro?

4. Achar dois números positivos cuja soma seja 70 e cujo produto seja o maior possível.

5. Usando uma folha quadrada de cartolina, de lado a, deseja-se construir uma caixa sem tampa, cortando em seus cantos quadrados iguais e dobrando convenientemente a parte restante. Determinar o lado dos quadrados que devem ser cortados de modo que o volume da caixa seja o maior possível.

6. Determinar as dimensões de uma lata cilíndrica, com tampa, com volume V, de forma que a sua área total seja mínima.

7. Duas indústrias A e B necessitam de água potável. A figura a seguir esquematiza a posição das indústrias, bem como a posição de um encanamento retilíneo l, já existente. Em que ponto do encanamento deve ser instalado um reservatório de modo que a metragem de cano a ser utilizada seja mínima?



8. Qual é o retângulo de perímetro máximo inscrito no círculo de raio 12 cm?

9. Traçar uma tangente à elipse $2x^2 + y^2 = 2$ de modo que a área do triângulo que ela forma com os eixos coordenados positivos seja mínima. Obter as coordenadas do ponto de tangência e a área mínima.

10. Mostrar que o volume do maior cilindro reto que pode ser inscrito num cone reto é 4/9 do volume do cone.

11. Um cone reto é cortado por um plano paralelo à sua base. A que distância da base deve ser feito esse corte, para que o cone reto de base na secção determinada, e de vértice no centro da base do cone dado, tenha volume máximo?

12. Determinar o ponto A da curva $y = x^2 + x$ que se encontra mais próximo de (7, 0). Mostrar que a reta que passa por (7, 0) e por A é normal à curva dada em A.

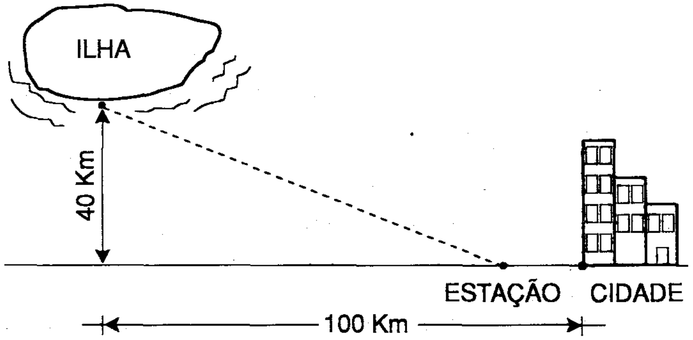
13. Uma folha de papel contém 375 cm^2 de matéria impressa, com margem superior de 3,5 cm, margem inferior de 2 cm, margem lateral direita de 2 cm e margem lateral esquerda de 2,5 cm.

Determinar quais devem ser as dimensões da folha para que haja o máximo de economia de papel.

14. Uma janela tem a forma de um retângulo encimado por um semi-círculo. Achar as dimensões de modo que o perímetro seja 3,2 m e a área a maior possível.

15. Um canhão, situado no solo, é posto sob um ângulo de inclinação α. Seja l o alcance do canhão, dado por $l = \frac{2v^2}{g}$ sen α cos α, onde v e g são constantes. Para que ângulo o alcance é máximo?

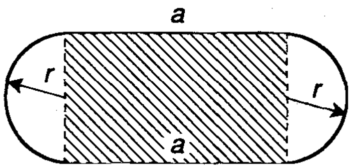
16. Uma agência de turismo está organizando um serviço de barcas, de uma ilha situada a 40 km de uma costa quase reta, para uma cidade que dista 100 km, como mostra a figura a seguir. Se a barca tem uma velocidade de 18 km por hora, e os carros tem uma velocidade média de 50 km/h, onde deverá estar situada a estação das barcas a fim de tornar a viagem a mais rápida possível?



17. Uma cerca de 1 m de altura está situada a uma distância de 1 m da parede lateral de um galpão. Qual o comprimento da menor escada cujas extremidades se apoiam na parede e no chão do lado de fora da cerca?

18. Seja s uma reta que passa pelo ponto (4, 3) formando um triângulo com os eixos coordenados positivos. Qual a equação de s para que a área desse triângulo seja mínima?

19. Uma pista de atletismo com comprimento total de 400 m, consiste de 2 semi-círculos e dois segmentos retos, conforme figura a seguir. Determinar as dimensões da pista, de tal forma que a área retangular, demarcada na figura, seja máxima.



20. Um cilindro circular reto está inscrito num cone circular reto de altura $H = 6$ m e raio da base $R = 3{,}5$ m. Determinar a altura e o raio da base do cilindro de volume máximo.

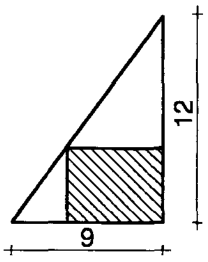
21. Uma fábrica produz x milhares de unidades mensais de um determinado artigo. Se o custo de produção é dado por $C = 2x^3 + 6x^2 + 18x + 60$, e o valor obtido na venda é dado por $V = 60x - 12x^2$, determinar o número ótimo de unidades mensais que maximiza o lucro $L = V - C$.

22. Um cilindro reto é inscrito numa esfera de raio R. Determinar esse cilindro, de forma que seu volume seja máximo.

23. Um fazendeiro deve cercar dois pastos retangulares, de dimensões a e b, com um lado comum a. Se cada pasto deve medir 400 m^2 de área, determinar as dimensões a e b, de forma que o comprimento da cerca seja mínimo.

24. Um fabricante, ao comprar caixas de embalagens, retangulares, exige que o comprimento de cada caixa seja 2 m e o volume 3 m^3. Para gastar a menor quantidade de material possível na fabricação das caixas, quais devem ser suas dimensões?

25. Um retângulo é inscrito num triângulo retângulo de catetos medindo 9 cm e 12 cm. Encontrar as dimensões do retângulo com maior área, supondo que sua posição é dada na figura a seguir.



5.14 REGRAS DE L'HOSPITAL

Nesta Seção apresentaremos um método geral para levantar indeterminações do tipo 0/0 ou ∞/∞. Esse método é dado pelas regras de L'Hospital, cuja demonstração necessita da seguinte proposição.

5.14.1 Proposição (Fórmula de Cauchy). Se f e g são duas funções contínuas em $[a, b]$, deriváveis em (a, b) e se $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, então existe um número $z \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Prova. Provemos primeiro que $g(b) - g(a) \neq 0$. Como g é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), pelo teorema do valor médio, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}. \qquad (1)$$

Como, por hipótese, $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, temos $g'(c) \neq 0$ e assim, pela igualdade (*1*), $g(b) - g(a) \neq 0$.

Consideremos a função

$$h(x) = f(x) - f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right][g(x) - g(a)].$$

A função h satisfaz as hipóteses do teorema de Rolle em $[a, b]$, pois:

(*i*) Como f e g são contínuas em $[a, b]$, h é contínua em $[a, b]$;

(*ii*) Como f e g são deriváveis em (a, b), h é derivável em (a, b);

(*iii*) $h(a) = h(b) = 0$.

Portanto, existe $z \in (a, b)$ tal que $h'(z) = 0$.

Como $h'(x) = f'(x) - \left[\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right] g'(x)$, temos

$$f'(z) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right] \cdot g'(z) = 0 . \qquad (2)$$

Mas $g'(z) \neq 0$. Logo, podemos escrever (2) na forma

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)} .$$

5.14.2 Proposição (Regras de L'Hospital). Sejam f e g funções deriváveis num intervalo aberto I, exceto possivelmente, em um ponto $a \in I$. Suponhamos que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \neq a$ em I.

(*i*) Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L ;$$

(*ii*) Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L .$$

Prova do item (*i*). Suponhamos que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ tome a forma indeterminada 0/0 e que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$. Queremos provar que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Consideremos duas funções F e G tais que

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \neq a \\ 0, & \text{se } x = a \end{cases} \quad \text{e} \quad G(x) = \begin{cases} g(x), & \text{se } x \neq a \\ 0, & \text{se } x = a \end{cases}$$

Então,

$$\lim_{x \to a} F(x) = \lim_{x \to a} f(x) = 0 = F(a)$$

e

$$\lim_{x \to a} G(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0 = G(a).$$

Assim, as funções F e G são contínuas no ponto a e portanto, em todo intervalo I.

Seja $x \in I$, $x \neq a$. Como para todo $x \neq a$ em I, f e g são deriváveis e $g'(x) \neq 0$, as funções F e G satisfazem as hipóteses da fórmula de Cauchy no intervalo $[x, a]$ ou $[a, x]$. Segue que existe um número z entre a e x tal que

$$\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(z)}{G'(z)}.$$

Como $F(x) = f(x)$, $G(x) = g(x)$, $F(a) = G(a) = 0$, $F'(z) = f'(z)$ e $G'(z) = g'(z)$, vem

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Como z está entre a e x, quando $x \to a$ temos que $z \to a$. Logo,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{z \to a} \frac{f'(z)}{g'(z)} = L.$$

Observamos que se

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0 \text{ ou } \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty,$$

e $\lim_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, a regra de L'Hospital continua válida, isto é

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty.$$

Ela também é válida para os limites laterais e para os limites no infinito.

A seguir apresentaremos vários exemplos, ilustrando como muitos limites que tomam formas indeterminadas podem ser resolvidos com o auxílio da regra de L'Hospital.

5.14.3 Exemplos

(*i*) Determinar $\lim_{x \to 0} \dfrac{2x}{e^x - 1}$.

Quando $x \to 0$, o quociente $\dfrac{2x}{e^x - 1}$ toma a forma indeterminada 0/0. Aplicando a regra de L'Hospital, vem

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{e^0} = 2.$$

(*ii*) Determinar $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2}$.

O limite toma a forma indeterminada 0/0. Aplicando a regra de L'Hospital, temos

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 2} \frac{2x + 1}{2x - 3} = \frac{2 \cdot 2 + 1}{2 \cdot 2 - 3} = 5 .$$

(*iii*) Determinar $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\, x - x}{e^x + e^{-x} - 2}$.

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo 0/0. Aplicando a regra de L'Hospital uma vez, temos

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x - x}{e^x + e^{-x} - 2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{e^x - e^{-x}} .$$

Como o último limite ainda toma a forma indeterminada 0/0, podemos aplicar novamente a regra de L'Hospital. Temos,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \to 0} \frac{-\text{sen}\, x}{e^x + e^{-x}} = \frac{-0}{2} = 0 .$$

Logo, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\, x - x}{e^x + e^{-x} - 2} = 0$.

(*iv*) Determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{x^3 + 4x}$.

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo ∞/∞. Aplicando a regra de L'Hospital sucessivas vezes, temos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{x^3 + 4x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{3x^2 + 4}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{6x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{6}$$

$$= +\infty.$$

(v) Determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x + 9)^{1/x}$.

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo ∞^0. Vamos transformá-la numa indeterminação do tipo ∞/∞ com o auxílio de logaritmos e em seguida aplicar a regra de L'Hospital.

Seja $L = \lim\limits_{x \to +\infty} (3x + 9)^{1/x}$. Então, $\ln L = \ln \left[\lim\limits_{x \to +\infty} (3x + 9)^{1/x} \right]$.

Aplicando a proposição 3.5.2(g) e as propriedades de logaritmos, vem

$$\ln L = \lim_{x \to +\infty} \ln (3x + 9)^{1/x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \ln (3x + 9)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln (3x + 9)}{x}.$$

Temos agora uma indeterminação do tipo ∞/∞. Aplicando a regra de L'Hospital, obtemos

$$\ln L = \lim_{x \to +\infty} \frac{3/(3x + 9)}{1} = \lim_{x \to \infty} \frac{3}{3x + 9} = 0.$$

Como $\ln L = 0$, temos $L = 1$ e dessa forma

$$\lim_{x \to +\infty} (3x + 9)^{1/x} = 1 .$$

(*vi*) Determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} x \cdot \text{sen } 1/x$.

Neste caso temos uma indeterminação do tipo $\infty \cdot 0$. Reescrevendo o limite dado na forma

$$\lim_{x \to +\infty} x \cdot \text{sen } 1/x = \lim_{x \to +\infty} \frac{\text{sen } 1/x}{1/x},$$

temos uma indeterminação do tipo 0/0.

Aplicando a regra de L'Hospital, vem

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} x \text{ sen } 1/x &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\text{sen } 1/x}{1/x} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{-1}{x^2} \cos \frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \cos 1/x \\
&= \cos 0 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

(vii) Determinar $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2 + x} - \frac{1}{\cos x - 1} \right)$.

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$. Reescrevendo o limite dado, temos

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2 + x} - \frac{1}{\cos x - 1} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1 - x^2 - x}{(x^2 + x)(\cos x - 1)}.$$

Temos então uma indeterminação do tipo 0/0. Aplicando a regra de L'Hospital, vem

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2 + x} - \frac{1}{\cos x - 1} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1 - x^2 - x}{(x^2 + x)(\cos x - 1)}.$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{sen} x - 2x - 1}{(x^2 + x) \cdot (-\operatorname{sen} x) + (\cos x - 1)(2x + 1)}$$

$$= \frac{-1}{0}$$

$$= \infty.$$

($viii$) Determinar $\lim_{x \to 0^+} (2x^2 + x)^x$.

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo 0^0. Com o auxílio de logaritmos, vamos transformá-la numa indeterminação da forma ∞/∞.

Seja $L = \lim_{x \to 0^+} (2x^2 + x)^x$. Então,

$$\ln L = \ln \left[\lim_{x \to 0^+} (2x^2 + x)^x \right]$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left[\ln (2x^2 + x)^x \right]$$

$$= \lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln (2x^2 + x)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln (2x^2 + x)}{1/x}.$$

Temos agora uma indeterminação do tipo ∞/∞. Aplicando a regra de L'Hospital, vem

$$\ln L = \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{4x + 1}{2x^2 + x}}{\dfrac{-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left(- \frac{4x^3 + x^2}{2x^2 + x} \right).$$

Aplicando novamente a regra de L'Hospital, obtemos

$$\ln L = \lim_{x \to 0^+} \left(- \frac{12x^2 + 2x}{4x + 1} \right)$$

$$= \frac{0}{1}$$

$$= 0.$$

Como $\ln L = 0$, temos $L = 1$. Logo,

$$\lim_{x \to 0^+} (2x^2 + x)^x = 1 .$$

(ix) Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$.

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo 1^∞. Usando logaritmos, vamos transformá-la numa indeterminação da forma 0/0.

Seja $L = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$. Então,

$$\begin{aligned}
\ln L &= \ln \left[\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \right] \\
&= \lim_{x \to +\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \right] \\
&= \lim_{x \to +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{2x}\right) \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{2x}\right)}{1/x}.
\end{aligned}$$

Temos agora uma indeterminação do tipo 0/0. Aplicando a regra de L'Hospital, obtemos

$$\begin{aligned}
\ln L &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{-1}{2x^2} \Big/ \left(1 + \frac{1}{2x}\right)}{-1/x^2} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{1/2}{1 + \frac{1}{2x}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1/2}{1}$$

$$= 1/2.$$

Portanto, $\ln L = \dfrac{1}{2}$ e dessa forma $L = e^{1/2}$. Logo,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x = e^{1/2}.$$

5.15 EXERCÍCIOS

Determinar os seguintes limites com auxílio das regras de L'Hospital.

1. $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2}$

2. $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4x + 3}$

3. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 6x}{x^3 + 7x^2 + 5x}$

4. $\displaystyle\lim_{x \to 1/2} \frac{2x^2 + x - 1}{4x^2 - 4x + 1}$

5. $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{6 - 2x + 3x^2 - x^3}{x^4 - 3x^3 - x + 3}$

6. $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x + 1}{2x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 1}$

7. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 6x + 7}{x^3 + 7x - 1}$

8. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{5 - 5x^3}{2 - 2x^3}$

9. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{7x^5 - 6}{4x^2 - 2x + 4}$

10. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{5 - x + x^2}{2 - x - 2x^2}$

11. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$

12. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{99}}{e^x}$

13. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x}{e^x - \cos x}$

14. $\lim_{x \to +\infty} x^2 (e^{1/x} - 1)$

15. $\lim_{x \to \pi/2} \dfrac{\cos x}{(x - \pi/2)^2}$

16. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2^x}{2^x - 1}$

17. $\lim_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{2x - 4} - \dfrac{1}{x - 2} \right)$

18. $\lim_{x \to +\infty} (\ln \dfrac{x}{x + 1})$

19. $\lim_{x \to \pi/2} \left(\dfrac{x}{\text{cotg } x} - \dfrac{\pi}{2 \cos x} \right)$

20. $\lim_{x \to +\infty} \text{tgh } x$

21. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{senh } x}{\text{sen } x}$

22. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

23. $\lim_{x \to \pi/4} \dfrac{\sec^2 x - 2 \text{ tg } x}{1 + \cos 4x}$

24. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cosh x - 1}{1 - \cos x}$

25. $\lim_{x \to 0} (1 - \cos x) \text{ cotg } x$

26. $\lim_{x \to 1} [\ln x \ln (x - 1)]$

27. $\lim_{x \to 1} \left[\dfrac{1}{2(1 - \sqrt{x})} - \dfrac{1}{3(1 - \sqrt[3]{x})} \right]$

28. $\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{3}{x^4 + \ln x}}$

29. $\lim_{x \to 0^+} x^{\text{sen } x}$

30. $\lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{1 - x}}$

31. $\lim_{x \to 1^-} (1 - x)^{\cos \frac{\pi x}{2}}$

32. $\lim_{x \to +\infty} x \text{ sen } \pi/x$

33. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^{2/3}}{(x^2 + 2)^{1/3}}$

34. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\text{senh } x}{x}$

35. $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 1)^{2/x}$

36. $\lim\limits_{x \to 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$

37. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln (\operatorname{sen} a x)}{\ln (\operatorname{sen} x)}$

38. $\lim\limits_{x \to 3} \left(\dfrac{1}{x - 3} - \dfrac{5}{x^2 - x - 6} \right)$

39. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$

40. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\frac{2}{2 + \ln x}}$

41. $\lim\limits_{x \to \pi/4} (1 - \operatorname{tg} x) \sec 2x$

42. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x \ln x}{x + \ln x}$

43. $\lim\limits_{x \to 0} (e^x + x)^{1/x}$.

5.16 FÓRMULA DE TAYLOR

A Fórmula de Taylor consiste num método de aproximação de uma função por um polinômio, com um erro possível de ser estimado.

5.16.1 Definição. Seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função que admite derivadas até ordem n num ponto c do intervalo I. O *polinômio de Taylor* de ordem n de f no ponto c, que denotamos por $P_n(x)$, é dado por

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n .$$

Observamos que no ponto $x = c$, $P_n(c) = f(c)$.

5.16.2 Exemplo. Determinar o polinômio de Taylor de ordem 4 da função $f(x) = e^x$ no ponto $c = 0$.

Temos, $f(x) = f'(x) = \ldots = f^{(iv)}(x) = e^x$ e assim,

$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(iv)}(0) = e^0 = 1$.

Portanto,

$$\begin{aligned} P_4(x) &= 1 + 1(x-0) + \frac{1}{2!}(x-0)^2 + \frac{1}{3!}(x-0)^3 + \frac{1}{4!}(x-0)^4 \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}, \end{aligned}$$

é o polinômio de Taylor de grau 4 da função $f(x) = e^x$ no ponto $c = 0$.

Dado o polinômio de Taylor de grau n de uma função $f(x)$, denotamos por $R_n(x)$ a diferença entre $f(x)$ e $P_n(x)$, isto é, $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ (ver Figura 5.33).

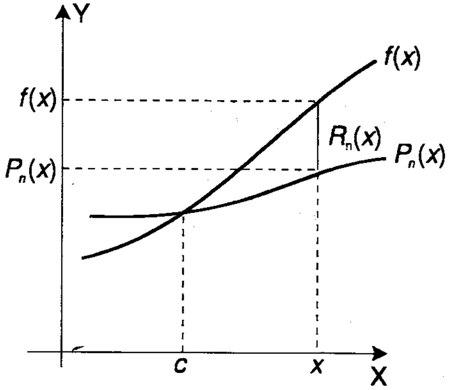


Figura 5-33

Temos então, $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, ou mais explicitamente,

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_n(x). \quad (1)$$

Para os valores de x nos quais $R_n(x)$ é "pequeno", o polinômio $P_n(x)$ dá uma boa aproximação de $f(x)$. Por isso, $R_n(x)$ chama-se *resto*. O problema, agora, consiste em determinar uma fórmula para $R_n(x)$ de tal modo que ele possa ser avaliado. Temos a seguinte proposição.

5.16.3 Proposição (Fórmula de Taylor). Seja f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ uma função definida num intervalo $[a, b]$. Suponhamos que as derivadas $f', f'', ..., f^{(n)}$ existam e sejam contínuas em $[a, b]$ e que $f^{(n+1)}$ exista em (a, b). Seja c um ponto qualquer fixado em $[a, b]$. Então, para cada $x \in [a, b]$, $x \neq c$, existe um ponto z entre c e x tal que

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}. \qquad (2)$$

Quando $c = 0$, a Fórmula de Taylor fica

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

e recebe o nome de Fórmula de Mac-Laurin.

Prova. Faremos a demonstração supondo $x > c$. Para $x < c$, o procedimento é análogo.

Sejam $P_n(t)$ o polinômio de Taylor de grau n de f no ponto c e $R_n(t)$ o resto correspondente. Então, $f(t) = P_n(t) + R_n(t)$, para qualquer $t \in [a, b]$.

Portanto, no ponto x, temos

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_n(x).$$

Para provar (2), devemos mostrar que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}, \text{ onde } z \text{ é um número entre } c \text{ e } x.$$

Para isso, vamos considerar a seguinte função auxiliar:

$g: [c, x] \to \mathbb{R}$

$$g(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x - t) - \frac{f''(t)}{2!}(x - t)^2 - \ldots$$

$$\ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n - R_n(x) \cdot \frac{(x - t)^{n+1}}{(x - c)^{n+1}}.$$

Pelas propriedades das funções contínuas, segue que g é contínua em $[c, x]$. Pelas propriedades das funções deriváveis, segue que g é derivável em (c, x). Além disso, podemos verificar que $g(c) = g(x) = 0$.

Logo, g satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle em $[c, x]$ e portanto existe um ponto z, entre c e x, tal que $g'(z) = 0$.

Derivando a função g com o auxílio das regras de derivação e simplificando, obtemos

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n + 1)!}(x - c)^{(n+1)},$$

e, conseqüentemente, a fórmula (2) fica provada.

Observando as fórmulas (*1*) e (*2*), vemos que na Fórmula de Taylor apresentada, o resto $R_n(x)$ é dado por

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n + 1)!}(x - c)^{n+1}.$$

Essa forma para o *resto* é chamada *Forma de Lagrange do Resto* e a fórmula (2) é dita *Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange*. Existem outras formas para o resto, como a forma da integral, que não abordaremos aqui.

5.16.4 Exemplos

(*i*) Determinar os polinômios de Taylor de grau 2 e de grau 4 da função $f(x) = \cos x$, no ponto $c = 0$. Esboçar o gráfico de f e dos polinômios encontrados.

Usando o polinômio $P_4(x)$ para determinar um valor aproximado para $\cos \frac{\pi}{6}$, o que se pode afirmar sobre o erro cometido?

Solução. Para determinar os polinômios pedidos, necessitamos do valor de f e de suas derivadas até ordem 4, no ponto $c = 0$.

Temos,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \cos x\,, & f(0) &= \cos 0 = 1\\
f'(x) &= -\operatorname{sen} x\,, & f'(0) &= -\operatorname{sen} 0 = 0\\
f''(x) &= -\cos x\,, & f''(0) &= -\cos 0 = -1\\
f'''(x) &= \operatorname{sen} x\,, & f'''(0) &= \operatorname{sen} 0 = 0\\
f^{iv}(x) &= \cos x\,, & f^{iv}(0) &= \cos 0 = 1.
\end{aligned}
$$

O polinômio de Taylor de grau 2, no ponto c, é dado por

$$P_2(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 .$$

Como no nosso caso $c = 0$, vem

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2\\
&= 1 + 0 \cdot x + \frac{(-1)}{2!}\,x^2\\
&= 1 - \frac{x^2}{2}.
\end{aligned}
$$

O polinômio de Taylor de grau 4, no ponto c, é dado por

$$P_4(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{iv}(x)}{4!}x^4$$

$$= 1 + 0 \cdot x + \frac{(-1)}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

A Figura 5.34 mostra o gráfico de $f(x)$, $P_2(x)$ e $P_4(x)$. Comparando esses gráficos, podemos observar que o gráfico de $P_4(x)$ está mais próximo do gráfico de $f(x)$. Se aumentarmos n, o gráfico de $P_n(x)$ se aproxima cada vez mais do gráfico de $f(x)$.

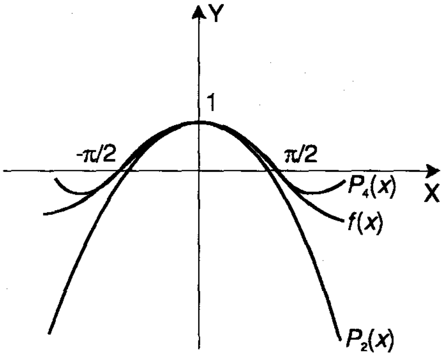


Figura 5-34

Usando o polinômio $P_4(x)$ para determinar um valor aproximado de $\cos \frac{\pi}{6}$, pela Fórmula de Taylor, temos

$$\cos\frac{\pi}{6} = P_4(\pi/6) + R_4(\pi/6)$$

$$= 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^4 + \frac{f^{(5)}(z)}{5!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^5,$$

onde z é um número entre 0 e $\pi/6$.

Como $f^{(v)}(x) = -\text{sen } x$ e $| - \text{sen } x | \leq 1$ para qualquer valor de x, podemos afirmar que o resto $R_4\ (\frac{\pi}{6})$ satisfaz

$$|R_4 (\pi/6)| = \frac{|-\text{sen } z|}{5!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^5 \leq \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^5$$

$$\cong 0{,}000327\,.$$

Logo, quando calculamos o valor de $\cos \frac{\pi}{6}$ pelo polinômio $P_4(x)$, temos

$$\cos \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{(\pi/6)^2}{2!} + \frac{(\pi/6)^4}{24}$$

$$\cong 0{,}86606$$

e podemos afirmar que o erro cometido, em módulo, é menor ou igual a 0,000327.

(*iii*) Determinar o polinômio de Taylor de grau 6 da função $f(x) = \text{sen } 2x$ no ponto $c = \frac{\pi}{4}$. Usar este polinômio para determinar um valor aproximado para $\text{sen } \frac{\pi}{3}$. Fazer uma estimativa para o erro.

Solução. Devemos calcular o valor da função e suas derivadas até ordem 6, no ponto $c = \frac{\pi}{4}$.

Temos,

$$f(x) = \text{sen } 2x \quad , \quad f(\pi/4) = \text{sen } \pi/2 = 1$$

$$f'(x) = 2 \cos 2x \quad , \quad f'(\pi/4) = 2 \cos \pi/2 = 0$$

$$f''(x) = -4 \text{ sen } 2x \quad , \quad f''(\pi/4) = -4$$

$$f'''(x) = -8 \cos 2x \quad , \quad f'''(\pi/4) = 0$$

$$f^{iv}(x) = 16 \operatorname{sen} 2x \ , \quad f^{iv}(\pi/4) = 16$$

$$f^{v}(x) = 32 \cos 2x \ , \quad f^{v}(\pi/4) = 0$$

$$f^{vi}(x) = -64 \operatorname{sen} 2x \ , \quad f^{vi}(\pi/4) = -64.$$

O polinômio de Taylor de grau 6, no ponto $c = \pi/4$, é dado por

$$P_6(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{f'(\pi/4))}{1!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{f''(\pi/4)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(vi)}(\pi/4)}{6!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^6$$

$$= 1 + 0 + \frac{(-4)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + 0 + \frac{16}{4!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 + 0 + \frac{(-64)}{6!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^6$$

$$= 1 - \frac{2^2}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{2^4}{4!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 - \frac{2^6}{6!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^6.$$

Usando o polinômio $P_6(x)$ para determinar sen $\frac{\pi}{3}$, obtemos pela Fórmula de Taylor,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \operatorname{sen}\,(2 \cdot \pi/6) = f(\pi/6) = P_6(\pi/6) + R_6(\pi/6)$$

$$= 1 - \frac{2^2}{2!}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{2^4}{4!}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)^4 - \frac{2^6}{6!}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)^6 + \frac{f^{(vii)}(z)}{7!}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)^7.$$

$$\cong 0{,}86602526 + \frac{f^{(vii)}(z)}{7!}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)^7.$$

Como $f^{(vii)}(x) = -128 \cos 2x$ e $|\cos 2x| \leq 1$ para todo x, o resto $R_6\left(\frac{\pi}{6}\right)$ satisfaz

$$|R_6(\pi/6)| \leq \left| \frac{128}{7!}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)^7 \right| \cong 2{,}1407 \times 10^{-6}.$$

Logo, usando o polinômio $P_6(x)$ obtemos sen $\frac{\pi}{3} = 0{,}86602526$ e o erro cometido, em módulo, será inferior a $2{,}1407 \times 10^{-6}$.

Usando a Fórmula de Taylor, pode-se demonstrar a seguinte proposição que nos dá mais um critério para determinação de máximos e mínimos de uma função.

5.16.5 Proposição. Seja f: $(a, b) \to \mathbb{R}$ uma função derivável n vezes e cujas derivadas, $f', f'', ..., f^{(n)}$ são contínuas em (a, b). Seja $c \in (a, b)$ um ponto crítico de f tal que $f'(c) = ... = f^{(n-1)}(c) = 0$ e $f^{(n)}(c) \neq 0$. Então,

(*i*) se n é par e $f^{(n)}(c) \leq 0$, f tem um máximo relativo em c;

(*ii*) se n é par e $f^{(n)}(c) \geq 0$, f tem um mínimo relativo em c;

(*iii*) se n é ímpar, c é um ponto de inflexão.

5.16.6 Exemplos

(*i*) Determinar os extremos da função $f(x) = (x-2)^6$.

Temos $f'(x) = 6(x-2)^5$. Fazendo $f'(x) = 0$, obtemos $x = 2$, que é o único ponto crítico de f.

Calculando as derivadas seguintes no ponto $x = 2$, temos

$$f''(x) = 30(x-2)^4, \quad f''(2) = 0$$
$$f'''(x) = 120(x-2)^3, \quad f'''(2) = 0$$
$$f^{iv}(x) = 360(x-2)^2, \quad f^{iv}(2) = 0$$

$$f^{(v)}(x) = 720(x-2), \quad f^{(v)}(2) = 0$$
$$f^{(vi)}(x) = 720, \quad f^{(vi)}(2) = 720 \neq 0.$$

Logo, $x = 2$ é um ponto de mínimo relativo.

(*ii*) Pesquisar máximos e mínimos da função $f(x) = x^5 - x^3$.

Fazendo $f'(x) = 5x^4 - 3x^2 = 0$, obtemos os pontos críticos que são $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3/5}$ e $x_3 = -\sqrt{3/5}$.

Calculando o valor das derivadas seguintes no ponto $x_1 = 0$, temos

$$f''(x) = 20x^3 - 6x, \quad f''(0) = 0$$
$$f'''(x) = 60x^2 - 6, \quad f'''(0) = -6 \neq 0.$$

Como $f'''(0) \neq 0$, concluímos que 0 é um ponto de inflexão.

No ponto $x_2 = \sqrt{3/5}$, temos

$$f''(x) = 20x^3 - 6x, \quad f''(\sqrt{3/5}) = 20(3/5)^{3/2} - 6\sqrt{3/5}$$
$$= \sqrt{3/5}\left(20 \cdot \frac{3}{5} - 6\right)$$
$$= 6\sqrt{3/5} > 0.$$

Logo, concluímos que $x_1 = \sqrt{3/5}$ é um ponto de mínimo relativo.

No ponto $x_3 = -\sqrt{3/5}$, temos

$$f''(x) = 20x^3 - 6x \ , \ f''(-\sqrt{3/5}) = -20\left(\frac{3}{5}\right)^{3/2} - 6(-\sqrt{3/5})$$

$$= -6\sqrt{3/5} < 0 .$$

Logo, o ponto $x_3 = -\sqrt{3/5}$ é um ponto de máximo relativo.

5.17 EXERCÍCIOS

1. Determinar o polinômio de Taylor de ordem n, no ponto c dado, das seguintes funções:

   a) $f(x) = e^{x/2}$; $c = 0$ e 1 ; $n = 5$

   b) $f(x) = e^{-x}$; $c = -1$ e 2 ; $n = 4$

   c) $f(x) = \ln(1 - x)$; $c = 0$ e $1/2$; $n = 4$

   d) $f(x) = \text{sen}\, x$; $c = \pi/2$; $n = 8$

   e) $f(x) = \cos 2x$; $c = 0$ e $\pi/2$; $n = 6$

   f) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$; $c = 0$ e 1 ; $n = 4$.

2. Encontrar o polinômio de Taylor de grau n no ponto c e escrever a função que define o resto na forma de Lagrange, das seguintes funções:

   a) $y = \cosh x$; $n = 4$; $c = 0$

   b) $y = \text{tg}\, x$; $n = 3$; $c = \pi$

   c) $y = \sqrt{x}$; $n = 3$; $c = 1$

   d) $y = e^{-x^2}$; $n = 4$; $c = 0$.

3. Usando o resultado encontrado no exercício 1, item (*c*), com $c = 0$, determinar um valor aproximado para ln 0,5. Fazer uma estimativa para o erro.

4. Determinar o polinômio de Taylor de grau 6 da função $f(x) = 1 + \cos x$ no ponto $c = \pi$. Usar este polinômio para determinar um valor aproximado para cos $(5\pi/6)$. Fazer uma estimativa para o erro.

5. Demonstrar que a diferença entre sen $(a + h)$ e sen a + h cos a é menor ou igual a $\dfrac{1}{2}h^2$.

6. Um fio delgado, pela ação da gravidade, assume a forma da catenária $y = a \cosh \frac{x}{a}$. Demonstrar que para valores pequenos de $|x|$, a forma que o fio toma pode ser representada, aproximadamente, pela parábola $y = a + \frac{x^2}{2a}$.

7. Pesquisar máximos e mínimos das seguintes funções:

a) $f(x) = 2x - 4$

b) $f(x) = 4 - 5x + 6x^2$

c) $f(x) = (x - 4)^{10}$

d) $f(x) = 4(x + 2)^7$

e) $f(x) = x^6 - 2x^4$

f) $f(x) = x^5 - \frac{125}{3}x^3$.

MAKRON
Books

CAPÍTULO 6

EDITORA DA UFSC

INTRODUÇÃO À INTEGRAÇÃO

Neste capítulo introduziremos a integral. Em primeiro lugar, trataremos da integração indefinida, que consiste no processo inverso da derivação. Em seguida, veremos a integral definida, que é a integral propriamente dita, e sua relação com o problema de determinar a área de uma figura plana. Por fim, apresentaremos o Teorema Fundamental do Cálculo, que é a peça chave de todo Cálculo Diferencial e Integral, pois estabelece a ligação entre as operações de derivação e integração.

6.1 INTEGRAL INDEFINIDA

6.1.1 Definição. Uma função $F(x)$ é chamada uma primitiva da função $f(x)$ em um intervalo I (ou simplesmente uma primitiva de $f(x)$), se para todo $x \in I$, temos $F'(x) = f(x)$.

Observamos que, de acordo com nossa definição, as primitivas de uma função $f(x)$ estão sempre definidas sobre algum intervalo. Quando não explicitamos o intervalo e nos referimos a duas primitivas da mesma função f, entendemos que essas funções são primitivas de f no mesmo intervalo I.

6.1.2 Exemplos

(*i*) $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ é uma primitiva da função $f(x) = x^2$, pois

$F'(x) = 1/3 \cdot 3x^2 = x^2 = f(x)$.

(*ii*) As funções $G(x) = x^3/3 + 4$, $H(x) = 1/3\ (x^3 + 3)$ também são primitivas da função $f(x) = x^2$, pois $G'(x) = H'(x) = f(x)$.

(*iii*) A função $F(x) = 1/2$ sen $2x + c$, onde c é uma constante, é primitiva da função $f(x) = \cos 2x$.

(*iv*) A função $F(x) = 1/2x^2$ é uma primitiva da função $f(x) = -1/x^3$ em qualquer intervalo que não contém a origem, pois para todo $x \neq 0$, temos $F'(x) = f(x)$.

Os exemplos anteriores nos mostram que uma mesma função $f(x)$ admite mais que uma primitiva. Temos as seguintes proposições.

6.1.3 Proposição. Seja $F(x)$ uma primitiva da função $f(x)$. Então, se c é uma constante qualquer, a função $G(x) = F(x) + c$ também é primitiva de $f(x)$.

Prova. Como $F(x)$ é primitiva de $f(x)$, temos que $F'(x) = f(x)$. Assim,

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) + 0 = f(x),$$

o que prova que $G(x)$ é uma primitiva de $f(x)$.

6.1.4 Proposição. Se $f'(x)$ se anula em todos os pontos de um intervalo I, então f é constante em I.

Prova. Sejam $x, y \in I$, $x < y$. Como f é derivável em I, f é contínua em $[x, y]$ e derivável em (x, y). Pelo Teorema do Valor Médio, existe $z \in (x, y)$, tal que

$$f'(z) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Como $f'(z) = 0$, vem que $f(y) - f(x) = 0$ ou $f(y) = f(x)$. Sendo x e y dois pontos quaisquer de I, concluímos que f é constante em I.

6.1.5 Proposição. Se $F(x)$ e $G(x)$ são funções primitivas de $f(x)$ no intervalo I, então existe uma constante c tal que $G(x) - F(x) = c$, para todo $x \in I$.

Prova. Seja $H(x) = G(x) - F(x)$. Como F e G são primitivas de $f(x)$ no intervalo I, temos $F'(x) = G'(x) = f(x)$, para todo $x \in I$. Assim,

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0, \text{ para todo } x \in I.$$

Pela proposição 6.1.4, existe uma constante c, tal que $H(x) = c$, para todo $x \in I$. Logo, para todo $x \in I$, temos

$$G(x) - F(x) = c.$$

Da proposição 6.1.5, concluímos que se $F(x)$ é uma particular primitiva de f, então toda primitiva de f é da forma

$$G(x) = F(x) + c,$$

onde c é uma constante. Assim o problema de determinar as primitivas de f, se resume em achar uma primitiva particular.

6.1.6 Exemplo. Sabemos que $(\text{sen } x)' = \cos x$. Assim, $F(x) = \text{sen } x$ é uma primitiva da função $f(x) = \cos x$ e toda primitiva de $f(x) = \cos x$ é da forma

$$G(x) = \text{sen } x + c,$$

para alguma constante c.

6.1.7 Definição. Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, a expressão $F(x) + c$ é chamada *integral indefinida* da função $f(x)$ e é denotada por

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c.$$

De acordo com esta notação o símbolo $\int$ é chamado *sinal de integração*, $f(x)$ *função integrando* e $f(x)\,dx$ *integrando*. O processo que permite achar a integral indefinida de uma função é chamado *integração*. O símbolo dx que aparece no integrando serve para identificar a variável de integração.

Da definição da integral indefinida, decorre que:

(*i*) $\int f(x)\,dx = F(x) + c \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$.

(*ii*) $\int f(x)\,dx$ representa uma família de funções (a família de todas as primitivas da função integrando).

Propriedades da Integral Indefinida

6.1.8 Proposição. Sejam $f, g: I \to \mathbb{R}$ e K uma constante. Então:

(*i*) $\int K f(x)\,dx = K \int f(x)\,dx$.

(*ii*) $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.

Prova.

(*i*) Seja $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$. Então $K\,F(x)$ é uma primitiva de $K f(x)$, pois $(K\,F(x))' = K\,F'(x) = K f(x)$. Desta forma, temos

$$\begin{aligned}\int K f(x)\,dx &= K\,F(x) + c = K\,F(x) + K\,c_1\\ &= K\,[F(x) + c_1] = K\int f(x)\,dx.\end{aligned}$$

(*ii*) Sejam $F(x)$ e $G(x)$ funções primitivas de $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente. Então, $F(x) + G(x)$ é uma primitiva da função $(f(x) + g(x))$, pois $[F(x) + G(x)]'$ $= F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$.

Portanto,

$$\begin{aligned}\int (f(x) + g(x))\,dx &= [F(x) + G(x)] + c \\ &= [F(x) + G(x)] + c_1 + c_2 \text{ , onde } \quad c = c_1 + c_2 \\ &= [F(x) + c_1] + [G(x) + c_2] \\ &= \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.\end{aligned}$$

O processo de integração exige muita intuição, pois conhecendo apenas a derivada de uma dada função nós queremos descobrir a função. Podemos obter uma tabela de integrais, chamadas imediatas, a partir das derivadas das funções elementares.

6.1.9 Exemplos

(*i*) Sabemos que $(\text{sen } x)' = \cos x$. Então $\int \cos x\, dx = \text{sen } x + c$.

(*ii*) Como $(-\cos \theta)' = \text{sen } \theta$, então $\int \text{sen } \theta\, d\theta = -\cos \theta + c$.

(*iii*) $\int e^x\, dx = e^x + c$, pois $(e^x)' = e^x$.

(*iv*) $\int x^{2/3}\, dx = \dfrac{3}{5} x^{5/3} + c$, pois $(3/5\, x^{5/3})' = x^{2/3}$.

(*v*) $\int \dfrac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + c$, pois $(2\sqrt{t})' = 1/\sqrt{t}$.

6.1.10 Tabela de Integrais Imediatas

(1) $\int du = u + c$

(2) $\int \frac{du}{u} = \ln |u| + c$

(3) $\int u^{\alpha} \, du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ (α é constante $\neq -1$)

(4) $\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + c$

(5) $\int e^u \, du = e^u + c$

(6) $\int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + c$

(7) $\int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + c$

(8) $\int \sec^2 u \, du = \operatorname{tg} u + c$

(9) $\int \operatorname{cosec}^2 u \, du = -\operatorname{cotg} u + c$

(10) $\int \sec u \cdot \operatorname{tg} u \, du = \sec u + c$

(11) $\int \operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{cotg} u \, du = -\operatorname{cosec} u + c$

(12) $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arc\,sen} u + c$

(13) $\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arc\,tg} u + c$

(14) $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \text{arc sec } u + c$

*(15) $\displaystyle\int \text{senh } u\, du = \cosh u + c$

(16) $\displaystyle\int \cosh u\, du = \text{senh } u + c$

(17) $\displaystyle\int \text{sech}^2 u\, du = \text{tgh } u + c$

(18) $\displaystyle\int \text{cosech}^2 u\, du = -\text{cotgh } u + c$

(19) $\displaystyle\int \text{sech } u \cdot \text{tgh } u\, du = -\text{sech } u + c$

*(20) $\displaystyle\int \text{cosech } u \cdot \text{cotgh } u\, du = -\text{cosech } u + c$

(21) $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \text{arg senh } u + c = \ln \left| u + \sqrt{u^2+1} \right| + c$

(22) $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \text{arg cosh } u + c = \ln \left| u + \sqrt{u^2-1} \right| + c$

(23) $$\int \frac{du}{1-u^2} = \begin{cases} \text{arg tgh } u + c, & \text{se } |u| < 1 \\ \text{arg cotgh } u + c, & \text{se } |u| > 1 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + c$$

(24) $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{1-u^2}} = -\text{arg sech } |u| + c$

(25) $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} = -\text{arg cosech } |u| + c\,.$

Usando as propriedades da integral indefinida e a tabela de integrais, podemos calcular a integral indefinida de algumas funções.

6.1.11 Exemplos. Calcular as integrais indefinidas.

(*i*) $\int (3x^2 + 5 + \sqrt{x})\, dx$.

Usando as propriedades da integral indefinida e a tabela de integrais, temos

$$\begin{aligned}\int (3x^2 + 5 + \sqrt{x})\, dx &= 3\int x^2\, dx + 5\int dx + \int x^{1/2}\, dx \\ &= 3\,\frac{x^3}{3} + 5x + \frac{x^{3/2}}{3/2} + c \\ &= x^3 + 5x + \frac{2}{3}\,x^{3/2} + c\,.\end{aligned}$$

(*ii*) $\int (3 \sec x \cdot \operatorname{tg} x + \operatorname{cosec}^2 x)\, dx$.

Temos,

$$\begin{aligned}\int (3 \sec x \cdot \operatorname{tg} x + \operatorname{cosec}^2 x)\, dx &= 3\int \sec x \operatorname{tg} x\, dx + \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx \\ &= 3 \sec x - \operatorname{cotg} x + c.\end{aligned}$$

(*iii*) $\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec} x}\, dx$.

Neste caso, temos

$$\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec} x}\, dx = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx = \int \operatorname{tg} x \cdot \sec x\, dx = \sec x + c\,.$$

(*iv*) $\int (\sqrt[3]{x^2} + 1/3x)\, dx$.

Temos,

$$\int (\sqrt[3]{x^2} + 1/3x)\, dx = \int \sqrt[3]{x^2}\, dx + \int 1/3x\, dx$$

$$= \int x^{2/3}\, dx + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{x^{5/3}}{5/3} + \frac{1}{3} \ln |x| + c$$

$$= \frac{3}{5} x^{5/3} + \frac{1}{3} \ln |x| + c\,.$$

(*v*) $\int \frac{x^4 + 3x^{-1/2} + 4}{\sqrt[3]{x}}\, dx$.

Temos,

$$\int \frac{x^4 + 3x^{-1/2} + 4}{\sqrt[3]{x}}\, dx = \int \left(\frac{x^4}{\sqrt[3]{x}} + \frac{3x^{-1/2}}{\sqrt[3]{x}} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$$

$$= \int (x^{11/3} + 3x^{-5/6} + 4x^{-1/3})\, dx$$

$$= \int x^{11/3}\, dx + 3 \int x^{-5/6}\, dx + 4 \int x^{-1/3}\, dx$$

$$= \frac{x^{14/3}}{14/3} + 3 \cdot \frac{x^{1/6}}{1/6} + 4 \cdot \frac{x^{2/3}}{2/3} + c$$

$$= \frac{3}{14} x^{14/3} + 18x^{1/6} + 6x^{2/3} + c\,.$$

(*vi*) $\int \left(2 \cos x + \dfrac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$.

Temos,

$$\int \left(2 \cos x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int 2 \cos x \, dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$= 2 \int \cos x \, dx + \int x^{-1/2} \, dx$$

$$= 2 \operatorname{sen} x + \frac{x^{1/2}}{1/2} + c$$

$$= 2 \operatorname{sen} x + 2\sqrt{x} + c.$$

(*vii*) $\int \left(2e^x - \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + \dfrac{2}{x^7} \right) dx$.

Temos,

$$\int \left(2e^x - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + \frac{2}{x^7} \right) dx = \int 2e^x \, dx - \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \, dx + \int \frac{2\,dx}{x^7}$$

$$= 2\int e^x \, dx - \int \sec x \cdot \operatorname{tg} x \, dx + 2 \int x^{-7} \, dx$$

$$= 2e^x - \sec x + 2 \cdot \frac{x^{-6}}{-6} + c$$

$$= 2e^x - \sec x - \frac{1}{3x^6} + c.$$

6.2 EXERCÍCIOS

Nos exercícios de 1 a 10, calcular a integral e, em seguida, derivar as respostas para conferir os resultados.

1. $\int \frac{dx}{x^3}$

2. $\int \left(9t^2 + \frac{1}{\sqrt{t^3}}\right) dt$

3. $\int (ax^4 + bx^3 + 3c)\, dx$

4. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}}{3}\right) dx$

5. $\int (2x^2 - 3)^2\, dx$

6. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}$

7. $\int \left(\sqrt{2y} - \frac{1}{\sqrt{2y}}\right) dy$

8. $\int \frac{\sqrt{2}\,dt}{3t^2 + 3}$

9. $\int x^3 \sqrt{x}\, dx$

10. $\int \frac{x^5 + 2x^2 - 1}{x^4}\, dx$

Nos exercícios de 11 a 30, calcular as integrais indefinidas.

11. $\int \frac{x^2}{x^2 + 1}\, dx$

12. $\int \frac{x^2 + 1}{x^2}\, dx$

13. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx$

14. $\int \sqrt{\frac{9}{1 - x^2}}\, dx$

15. $\int \sqrt{\frac{4}{x^4 - x^2}}\, dx$

16. $\int \frac{8x^4 - 9x^3 + 6x^2 - 2x + 1}{x^2}\, dx$

17. $\int \left(\frac{e^t}{2} + \sqrt{t} + \frac{1}{t}\right) dt$

18. $\int \cos\theta \cdot \operatorname{tg}\theta\, d\theta$

19. $\int (e^x - e^{-x})\, dx$

20. $\int (t + \sqrt{t} + \sqrt[3]{t} + \sqrt[4]{t} + \sqrt[5]{t})\, dt$

21. $\displaystyle\int \frac{x^{-1/3} - 5}{x}\, dx$

22. $\displaystyle\int (2^t - \sqrt{2}\, e^t + \cosh t)\, dt$

23. $\displaystyle\int \sec^2 x\, (\cos^3 x + 1)\, dx$

24. $\displaystyle\int \frac{dx}{(ax)^2 + a^2}$, $a \neq 0$, constante.

25. $\displaystyle\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\, dx$

26. $\displaystyle\int \sqrt[3]{8\, (t - 2)^6\, (t + \frac{1}{2})^3}\, dt$

27. $\displaystyle\int \left(e^t - \sqrt[4]{16t} + \frac{3}{t^3} \right) dt$

28. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x \ln x^2}\, dx$

29. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x \operatorname{cosec}^2 x\, dx$

30. $\displaystyle\int (x - 1)^2 (x + 1)^2\, dx$

31. $\displaystyle\int \frac{dt}{(n - 1/2)\, t^n}$, onde $n \in z$.

32. Encontrar uma primitiva F, da função $f(x) = x^{2/3} + x$, que satisfaça $F(1) = 1$.

33. Determinar a função $f(x)$ tal que

$$\int f(x)\, dx = x^2 + \frac{1}{2} \cos 2x + c\, .$$

34. Encontrar uma primitiva da função $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + 1$ que se anule no ponto $x = 2$.

35. Sabendo que a função $f(x)$ satisfaz a igualdade

$$\int f(x)\, dx = \operatorname{sen} x - x \cos x - \frac{1}{2} x^2 + c\, ,$$ determinar $f(\pi/4)$.

36. Encontrar uma função f tal que $f'(x) + \operatorname{sen} x = 0$ e $f(0) = 2$.

6.3 MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO OU MUDANÇA DE VARIÁVEL PARA INTEGRAÇÃO

Algumas vezes, é possível determinar a integral de uma dada função, aplicando uma das fórmulas básicas depois de ser feita uma mudança de variável. Este processo é análogo à regra da cadeia para derivação e pode ser justificado como segue.

Sejam $f(x)$ e $F(x)$ duas funções tais que $F'(x) = f(x)$. Suponhamos que g seja outra função derivável tal que a imagem de g esteja contida no domínio de F. Podemos considerar a função composta $F_0 \, g$.

Pela regra da cadeia, temos

$[F(g(x))]' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$, isto é, $F(g(x))$ é uma primitiva de $f(g(x)) \cdot g'(x)$.

Temos, então

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = F(g(x)) + c. \qquad (1)$$

Fazendo $u = g(x)$, $du = g'(x)\, dx$ e substituindo em (*1*), vem

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int f(u)\, du = F(u) + c.$$

Na prática, devemos então definir uma função $u = g(x)$ conveniente, de tal forma que a integral obtida seja mais simples.

6.3.1 Exemplos. Calcular as integrais:

(*i*) $\displaystyle\int \frac{2x}{1 + x^2}\, dx$.

Fazemos $u = 1 + x^2$. Então, $du = 2x\, dx$. Temos,

$$\int \frac{2x}{1 + x^2}\, dx = \int \frac{du}{u}$$

$$= \ln |u| + c$$

$$= \ln (1 + x^2) + c.$$

(*ii*) $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx.$

Se fizermos $u = \operatorname{sen} x$, então $du = \cos x \, dx$. Assim,

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx = \int u^2 \, du$$

$$= \frac{u^3}{3} + c$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + c.$$

(*iii*) $\int \operatorname{sen} (x + 7) \, dx.$

Fazendo $u = x + 7$, temos $du = dx$. Então,

$$\int \operatorname{sen} (x + 7) \, dx = \int \operatorname{sen} u \, du$$

$$= -\cos u + c$$

$$= -\cos (x + 7) + c.$$

(*iv*) $\int tg \, x \, dx.$

Podemos escrever $\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx$.

Fazendo $u = \cos x$, temos $du = -\operatorname{sen} x\, dx$ e então $\operatorname{sen} x\, dx = -du$. Portanto,

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{-du}{u} = -\int \frac{du}{u} = -\ln |u| + c$$

$$= -\ln |\cos x| + c.$$

(*v*) $\displaystyle\int \frac{dx}{(3x-5)^8}$.

Fazendo $u = 3x - 5$, temos $du = 3\, dx$ ou $dx = 1/3\, du$. Portanto,

$$\int \frac{dx}{(3x-5)^8} = \int \frac{1/3\, du}{u^8} = \frac{1}{3}\int u^{-8}\, du = \frac{1}{3}\,\frac{u^{-7}}{-7} + c$$

$$= \frac{-1}{21\,(3x-5)^7} + c.$$

(*vi*) $\displaystyle\int (x + \sec^2 3x)\, dx$.

Podemos escrever,

$$\int (x + \sec^2 3x)\, dx = \int x\, dx + \int sec^2 3x\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + \int \sec^2 3x\, dx. \qquad (1)$$

Para resolver $\int \sec^2 3x\, dx$ fazemos a substituição $u = 3x$. Temos, então $du = 3dx$ ou $dx = 1/3\, du$. Assim,

$$\int \sec^2 3x \, dx = \int \sec^2 u \cdot \frac{1}{3} \, du = \frac{1}{3} \int \sec^2 u \, du$$

$$= \frac{1}{3} \operatorname{tg} u + c = \frac{1}{3} \operatorname{tg} 3x + c \, .$$

Substituindo em (*1*), obtemos

$$\int (x + \sec^2 3x) \, dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg} 3x + c \, .$$

(*vii*) $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2}$, $(a \neq 0)$.

Como $a \neq 0$, podemos escrever a integral dada na forma

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \int \frac{\frac{du}{a^2}}{\frac{u^2 + a^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2} \int \frac{du}{\frac{u^2}{a^2} + 1} \, .$$

Fazemos a substituição $v = u/a$. Temos então, $dv = 1/a \, du$ ou $du = a \, dv$. Portanto,

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a \, dv}{v^2 + 1} = \frac{1}{a} \int \frac{dv}{v^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} v + c$$

$$= \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{a} + c \, .$$

(*viii*) $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13}$.

Para resolver esta integral devemos completar o quadrado do denominador. Escrevemos,

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 13 &= x^2 + 2 \cdot 3x + 9 - 9 + 13 \\ &= (x + 3)^2 + 4. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13} = \int \frac{dx}{(x + 3)^2 + 4}.$$

Fazendo $u = x + 3$, $du = dx$ e usando o exemplo anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13} &= \int \frac{du}{u^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \text{ arc tg } \frac{u}{2} + c \\ &= \frac{1}{2} \text{ arc tg } \frac{x + 3}{2} + c. \end{aligned}$$

(*ix*) $\int \frac{\sqrt{x - 2}}{x + 1}\, dx$.

Neste caso, fazemos a substituição $u = \sqrt{x - 2}$. Então, $u^2 = x - 2$ ou $x = u^2 + 2$, ou ainda, $dx = 2\,u\,du$.

Substituindo na integral, vem

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x - 2}}{x + 1}\, dx &= \int \frac{u}{u^2 + 2 + 1} \cdot 2\,u\,du \\ &= \int \frac{2\,u^2\,du}{u^2 + 3} = 2 \int \frac{u^2\,du}{u^2 + 3}. \end{aligned}$$

Efetuando a divisão dos polinômios, temos

$$\int \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}\,dx = 2\int \left(1 + \frac{-3}{u^2+3}\right) du$$

$$= 2\left[\int du - 3\int \frac{du}{u^2+3}\right]$$

$$= 2u - 6\int \frac{du}{u^2+3}$$

$$= 2u - \frac{6}{\sqrt{3}}\ \text{arc tg}\ \frac{u}{\sqrt{3}} + c$$

$$= 2\sqrt{x-2} - \frac{6}{\sqrt{3}}\ \text{arc tg}\ \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3}} + c\,.$$

(x) $\int \sqrt{t^2 - 2t^4}\,dt$.

Escrevemos,

$$\int \sqrt{t^2 - 2t^4}\,dt = \int \sqrt{t^2(1-2t^2)}\,dt = \int t\sqrt{1-2t^2}\,dt\,.$$

Fazendo $u = 1 - 2t^2$, temos $du = -4t\,dt$ e então $t\,dt = \frac{-du}{4}\cdot$ Assim,

$$\int \sqrt{t^2 - 2t^4}\,dt = \int u^{1/2}\cdot\frac{-du}{4} = -\frac{1}{4}\int u^{1/2}\,du$$

$$= -\frac{1}{4}\,\frac{u^{3/2}}{3/2} + c = \frac{-1}{6}(1-2t^2)^{3/2} + c\,.$$

6.4 EXERCÍCIOS

Calcular as integrais seguintes usando o método da substituição.

1. $\int (2x^2 + 2x - 3)^{10} (2x + 1)\, dx$

2. $\int (x^3 - 2)^{1/7} x^2\, dx$

3. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt[5]{x^2 - 1}}$

4. $\int 5x \sqrt{4 - 3x^2}\, dx$

5. $\int \sqrt{x^2 + 2x^4}\, dx$

6. $\int (e^{2t} + 2)^{1/3} e^{2t}\, dt$

7. $\int \frac{e^t\, dt}{e^t + 4}$

8. $\int \frac{e^{1/x} + 2}{x^2}\, dx$

9. $\int \operatorname{tg} x \sec^2 x\, dx$

10. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos x\, dx$

11. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^5 x}\, dx$

12. $\int \frac{2 \operatorname{sen} x - 5 \cos x}{\cos x}\, dx$

13. $\int e^x \cos 2\, e^x\, dx$

14. $\int \frac{x}{2} \cos x^2\, dx$

15. $\int \operatorname{sen}\, (5\theta - \pi)\, d\theta$

16. $\int \frac{\operatorname{arc\, sen} y}{2\sqrt{1 - y^2}}\, dy$

17. $\int \frac{2 \sec^2 \theta}{a + b \operatorname{tg} \theta}\, d\theta$

18. $\int \frac{dx}{16 + x^2}$

19. $\int \frac{dy}{y^2 - 4y + 4}$

20. $\int \sqrt[3]{\operatorname{sen} \theta}\, \cos \theta\, d\theta$

21. $\int \frac{\ln x^2}{x}\, dx$

22. $\int (e^{ax} + e^{-ax})^2\, dx$

23. $\int \sqrt{3t^4 + t^2}\, dt$

24. $\int \frac{4\,dx}{4x^2 + 20x + 34}$

25. $\int \frac{3\,dx}{x^2 - 4x + 1}$

26. $\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x} + 16}$

27. $\int \frac{\sqrt{x+3}}{x-1}\, dx$

28. $\int \frac{3\,dx}{x \ln^2 3x}$

29. $\int (\operatorname{sen} 4x + \cos 2\pi)\, dx$

30. $\int 2^{x^2+1}\, x\, dx$

31. $\int x\, e^{3x^2}\, dx$

32. $\int \frac{dt}{(2+t)^2}$

33. $\int \frac{dt}{t \ln t}$

34. $\int 8x \sqrt{1 - 2x^2}\, dx$

35. $\int (e^{2x} + 2)^5\, e^{2x}\, dx$

36. $\int \frac{4t\,dt}{\sqrt{4t^2 + 5}}$

37. $\int \frac{\cos x}{3 - \operatorname{sen} x}\, dx$

38. $\int \frac{dv}{\sqrt{v}\,(1 + \sqrt{v})^5}$

39. $\int x^2 \sqrt{1 + x}\, dx$

40. $\int x^4\, e^{-x^5} dx$

41. $\int t \cos t^2\, dt$

42. $\int 8x^2 \sqrt{6x^3 + 5}\, dx$

43. $\int \operatorname{sen}^{1/2} 2\theta\, \cos 2\theta\, d\theta$

44. $\int \sec^2 (5x + 3)\, dx$

45. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\theta \; d\theta}{(5 - \cos\theta)^3}$

46. $\displaystyle\int \operatorname{cotg} u \; du$

47. $\displaystyle\int (1 + e^{-at})^{3/2} \, e^{-at} \, dt, \quad a > 0$

48. $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

49. $\displaystyle\int t\sqrt{t-4} \; dt$

50. $\displaystyle\int x^2 \, (\operatorname{sen} 2x^3 + 4x) \; dx$

6.5 MÉTODO DE INTEGRAÇÃO POR PARTES

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções deriváveis no intervalo I. Temos,

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

ou,

$$f(x) \cdot g'(x) = [f(x) \cdot g(x)]' - g(x) \cdot f'(x).$$

Integrando ambos os lados dessa equação, obtemos

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx = \int [f(x) \cdot g(x)]' \, dx - \int g(x) \cdot f'(x) \, dx,$$

ou ainda,

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f'(x) \, dx. \qquad (1)$$

Observamos que na expressão (*1*) deixamos de escrever a constante de integração, já que no decorrer do desenvolvimento aparecerão outras. Todas elas podem ser representadas por uma única constante c, que introduziremos no final do processo.

Na prática, costumamos fazer

$$u = f(x) \quad \Rightarrow \quad du = f'(x) \, dx$$

e

$$v = g(x) \qquad \Rightarrow \quad dv = g'(x)\, dx.$$

Substituindo em (*1*), vem

$$\boxed{\int u\, dv = uv - \int v\, du,}$$

que é a fórmula de integração por partes.

6.5.1 Exemplos

(*i*) Calcular $\int x\, e^{-2x}\, dx$.

Antes de resolver esta integral, queremos salientar que a escolha de u e dv são feitas convenientemente.

Neste exemplo, escolhemos $u = x$ e $dv = e^{-2x}\, dx$. Temos,

$$u = x \qquad \Rightarrow \qquad du = dx$$

$$dv = e^{-2x}\, dx \qquad \Rightarrow \qquad v = \int e^{-2x}\, dx = \frac{-1}{2}\, e^{-2x}.$$

Aplicamos então a fórmula

$$\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du$$

e obtemos

$$\int x\, e^{-2x}\, dx = x \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) e^{-2x} - \int \frac{-1}{2}\, e^{-2x}\, dx.$$

Calculando a última integral, vem

$$\int x \cdot e^{-2x}\,dx = \frac{-1}{2}\,x\,e^{-2x} - \frac{1}{4}\,e^{-2x} + c\,.$$

Observamos que se tivéssemos escolhido $u = e^{-2x}$ e $dv = x\,dx$, o processo nos levaria a uma integral mais complicada.

(*ii*) Calcular $\int \ln x\,dx$.

Seja

$$u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = 1/x\,dx$$

$$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = \int dx = x.$$

Integrando por partes, vem

$$\begin{aligned} \int \ln x\,dx &= (\ln x)\cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ &= x\ln x - \int dx \\ &= x\ln x - x + c. \end{aligned}$$

(*iii*) Calcular $\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx$.

Neste exemplo, vamos aplicar o método duas vezes. Seja

$$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\,dx$$

$$dv = \operatorname{sen} x\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x.$$

Integrando por partes, vem

$$\int x^2 \cdot \text{sen}\, x\, dx = x^2(-\cos x) - \int (-\cos x)\, 2x\, dx$$
$$= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x\, dx.$$

A integral $\int x \cos x\, dx$ deve ser resolvida também por partes. Fazemos,

$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$

$dv = \cos x\, dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \cos x\, dx = \text{sen}\, x.$

Temos,

$$\int x \cos x\, dx = x\, \text{sen}\, x - \int \text{sen}\, x\, dx.$$

Logo,

$$\int x^2\, \text{sen}\, x\, dx = -x^2 \cos x + 2\, [x\, \text{sen}\, x - \int \text{sen}\, x\, dx]$$
$$= -x^2 \cos x + 2x\, \text{sen}\, x + 2 \cos x + c.$$

(*iv*) Calcular $\int e^{2x}\, \text{sen}\, x\, dx.$

Este exemplo ilustra um artifício para o cálculo, que envolve também duas aplicações da fórmula de integração por partes.

Seja

$u = e^{2x} \quad \Rightarrow \quad du = 2\, e^{2x}\, dx$

$dv = \text{sen}\, x\, dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \text{sen}\, x\, dx = -\cos x.$

Aplicando a integração por partes, vem

$$\begin{aligned}\int e^{2x} \operatorname{sen} x\, dx &= e^{2x}(-\cos x) - \int (-\cos x)\, 2e^{2x}\, dx \\ &= -e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos x\, dx.\end{aligned}$$

Resolvendo $\int e^{2x} \cos x\, dx$ por partes, fazendo $u = e^{2x}$ e $dv = \cos x\, dx$, encontramos

$$\begin{aligned}\int e^{2x} \operatorname{sen} x\, dx &= -e^{2x}\cos x + 2\,[e^{2x} \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \cdot 2\, e^{2x}\, dx] \\ &= -e^{2x}\cos x + 2\, e^{2x} \operatorname{sen} x - 4\int e^{2x} \operatorname{sen} x\, dx. \qquad (2)\end{aligned}$$

Observamos que a integral do 2º membro é exatamente a integral que queremos calcular. Somando $4\int e^{2x} \operatorname{sen} x\, dx$ a ambos os lados de (2) , obtemos

$$5\int e^{2x} \operatorname{sen} x\, dx = -e^{2x}\cos x + 2\, e^{2x} \operatorname{sen} x.$$

Logo,

$$\int e^{2x} \operatorname{sen} x\, dx = \frac{1}{5}\,(2\, e^{2x} \operatorname{sen} x - e^{2x}\cos x) + c\,.$$

(*v*) Calcular $\int \operatorname{sen}^3 x\, dx$.

Neste caso, fazemos

$$u = \operatorname{sen}^2 x \quad \Rightarrow \quad du = 2 \operatorname{sen} x \cos x\, dx$$

$$dv = \operatorname{sen} x\, dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x.$$

Então,

$$\int \text{sen}^3 x\, dx = \text{sen}^2 x \cdot (-\cos x) - \int -\cos x \cdot 2\,\text{sen}\, x \cos x\, dx$$

$$= -\text{sen}^2 x \cos x + 2 \int \cos^2 x\, \text{sen}\, x\, dx$$

$$= -\text{sen}^2\, x\, \cos\, x - 2\, \frac{\cos^3\, x}{3} + c\,.$$

6.6 EXERCÍCIOS

Resolver as seguintes integrais usando a técnica de integração por partes.

1. $\int x\ \text{sen}\ 5x\ dx$
2. $\int \ln (1 - x)\ dx$
3. $\int t\, e^{4t}\ dt$
4. $\int (x + 1)\ \cos 2\,x\ dx$
5. $\int x\ \ln\ 3\,x\ dx$
6. $\int \cos^3 x\ dx$
7. $\int e^x\ \cos\ \frac{x}{2}\ dx$
8. $\int \sqrt{x}\ \ln\ x\ dx$
9. $\int \text{cosec}^3 x\ dx$
10. $\int x^2\ \cos a\, x\ dx$
11. $\int x\ \text{cosec}^2 x\ dx$
12. $\int \text{arc cotg}\ 2x\ dx$

13. $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx \; dx$

14. $\int \dfrac{\ln(ax + b)}{\sqrt{ax + b}} \; dx$

15. $\int x^3 \sqrt{1 - x^2} \; dx$

16. $\int \ln^3 2x \; dx$

17. $\int \operatorname{arc\,tg} a x \; dx$

18. $\int x^3 \operatorname{sen} 4x \; dx$

19. $\int (x - 1)\, e^{-x} \; dx$

20. $\int x^2 \ln x \; dx$

21. $\int x^2 e^x \; dx$

22. $\int \operatorname{arc\,sen} \dfrac{x}{2} \; dx$

23. $\int (x - 1) \sec^2 x \; dx$

24. $\int e^{3x} \cos 4x \; dx$

25. $\int x^n \ln x \; dx, \quad n \in N$

26. $\int \ln(x^2 + 1) \; dx$

27. $\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \; dx$

28. $\int x \operatorname{arc\,tg} x \; dx$

29. $\int x^5 e^{x^2} \; dx$

30. $\int x \cos^2 x \; dx$

31. $\int (x + 3)^2 e^x \; dx$

32. $\int x \sqrt{x + 1} \; dx$

33. $\int \cos(\ln x) \; dx$

34. $\int \operatorname{arc\,cos} x \; dx$

35. $\int \sec^3 x \; dx$

36. $\int \dfrac{1}{x^3} e^{1/x} \; dx.$

6.7 ÁREA

Desde os tempos mais antigos os matemáticos se preocupam com o problema de determinar a área de uma figura plana. O procedimento mais usado foi o método da exaustão, que consiste em aproximar a figura dada por meio de outras, cujas áreas são conhecidas.

Como exemplo, podemos citar o círculo. Para definir sua área, consideramos um polígono regular inscrito de n lados, que denotamos por P_n (Figura 6.1(*a*)).

Seja A_n a área do polígono P_n. Então, $A_n = n \cdot A_{T_n}$, onde A_{T_n} é a área do triângulo de base l_n e altura h_n (Figura 6.1(*b*)).

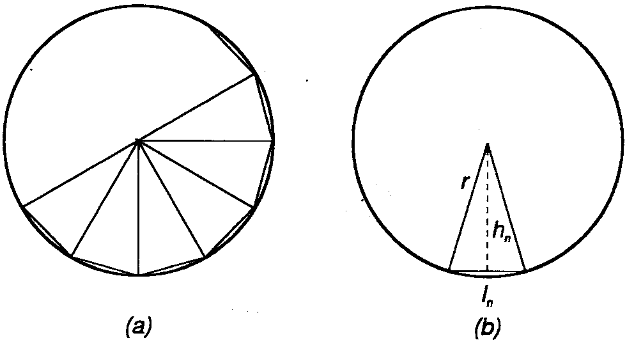


Figura 6-1

Como $A_{T_n} = \dfrac{l_n \cdot h_n}{2}$ e o perímetro do polígono P_n é dado por $p_n = nl_n$, vem

$$A_n = n \cdot \frac{l_n \cdot h_n}{2} = \frac{p_n\, h_n}{2}.$$

Fazendo n crescer cada vez mais, isto é, $n \to +\infty$, o polígono P_n torna-se uma aproximação do círculo. O perímetro p_n aproxima-se do comprimento do círculo $2\pi r$ e a altura h_n aproxima-se do raio r.

Temos,

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2 \text{, que é a área do círculo.}$$

Para definir a área de uma figura plana qualquer, procedemos de forma análoga. Aproximamos a figura por polígonos cujas áreas possam ser calculadas pelos métodos da geometria elementar.

Consideremos agora o problema de definir a área de uma região plana S, delimitada pelo gráfico de uma função contínua não negativa f, pelo eixo dos x e por duas retas $x = a$ e $x = b$ (ver Figura 6.2).

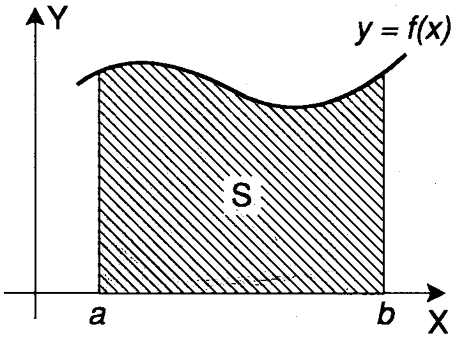


Figura 6-2

Para isso, fazemos uma partição do intervalo $[a, b]$, isto é, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos, escolhendo os pontos

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b.$$

Seja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ o comprimento do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Em cada um destes intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, escolhemos um ponto qualquer c_i.

Para cada i, $i = 1, \ldots, n$, construímos um retângulo de base Δx_i e altura $f(c_i)$ (ver Figura 6.3).

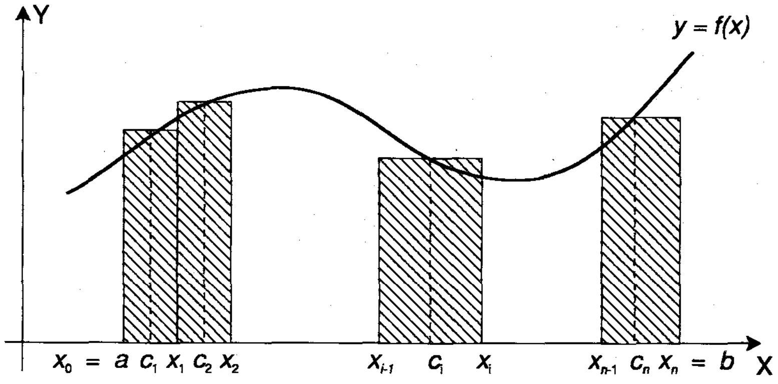


Figura 6-3

A Figura 6.4 ilustra esses retângulos nos casos $n = 4$ e $n = 8$.

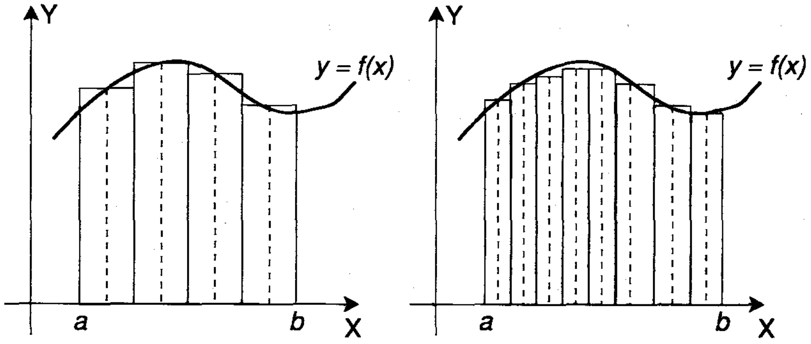


Figura 6-4

A soma das áreas dos n retângulos, que representamos por S_n, é dada por:

$$S_n = f(c_1)\,\Delta x_1 + f(c_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\,\Delta x_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\;\Delta x_i\,.$$

Esta soma é chamada *soma de Riemann* da função $f(x)$.

Podemos observar que a medida que n cresce muito e cada Δx_i, $i = 1, ..., n$, torna-se muito pequeno, a soma das áreas retangulares aproxima-se do que intuitivamente entendemos como a área de S.

6.7.1 Definição. Seja $y = f(x)$ uma função contínua, não negativa em $[a, b]$. A área sob a curva $y = f(x)$, de a até b, é definida por

$$A = \lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i,$$

onde para cada $i = 1, ..., n$, c_i é um ponto arbitrário do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

É possível provar que o limite desta definição existe e é um número não negativo.

6.8 INTEGRAL DEFINIDA

A integral definida está associada ao limite da definição 6.7.1. Ela nasceu com a formalização matemática dos problemas de áreas. De acordo com a terminologia introduzida na seção anterior, temos a seguinte definição.

6.8.1 Definição. Seja f uma função definida no intervalo $[a, b]$ e seja P uma partição qualquer de $[a, b]$. A *integral definida* de f de a até b, denotada por

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

é dada por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i,$$

desde que o limite do 2º membro exista.

Se $\int_a^b f(x)\,dx$ existe, dizemos que f é *integrável* em $[a, b]$.

Na notação $\int_a^b f(x)\,dx$, os números a e b são chamados *limites de integração* (a = limite inferior e b = limite superior).

Se f é integrável em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(s)\,ds,$$

isto é, podemos usar qualquer símbolo para representar a variável independente.

Quando a função f é contínua e não negativa em $[a, b]$, a definição da integral definida coincide com a definição da área (Definição 6.7.1). Portanto, neste caso, a integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

é a área da região sob o gráfico de f de a até b.

Sempre que utilizamos um intervalo $[a, b]$, supomos $a < b$. Assim, em nossa definição não levamos em conta os casos em que o limite inferior é maior que o limite superior.

6.8.2 Definição

(*a*) Se $a > b$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$$

se a integral à direita existir.

(*b*) Se $a = b$ e $f(a)$ existe, então

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

É muito importante saber quais funções são integráveis. Uma ampla classe de funções usadas no Cálculo é a classe das funções contínuas. O teorema abaixo, cuja demonstração será omitida, garante que elas são integráveis.

6.8.3 Teorema. Se f é contínua sobre $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$.

Propriedades da Integral Definida

6.8.4 Proposição. Se f é integrável em $[a, b]$ e k é um número real arbitrário, então kf é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b k f(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx .$$

Prova. Como f é integrável em $[a, b]$, existe o

$$\lim_{\text{máx}\, \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i ,$$

e portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_a^b k f(x)\, dx &= \lim_{\text{máx}\, \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} k f(c_i)\, \Delta x_i \\ &= k \lim_{\text{máx}\, \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i \\ &= k \int_a^b f(x)\, dx . \end{aligned}$$

6.8.5 Proposição. Se f e g são funções integráveis em $[a, b]$, então $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx.$$

Prova. Se f é integrável em $[a, b]$, existe o limite

$$\lim_{\text{máx}\, \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i\ , \quad \text{que é a} \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Se g é integrável em $[a, b]$, existe o limite

$$\lim_{\text{máx}\, \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(c_i)\, \Delta x_i\ , \quad \text{que é a} \int_a^b g(x)\, dx\,.$$

Escrevemos então,

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \lim_{\text{máx}\, \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} (f(c_i) + g(c_i))\, \Delta x_i$$

$$= \lim_{\text{máx}\, \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i + \lim_{\text{máx}\, \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(c_i)\, \Delta x_i$$

$$= \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx\,.$$

Observamos que esta proposição pode ser estendida para um número finito de funções, ou seja,

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]\, dx = \int_a^b f_1(x)\, dx + \int_a^b f_2(x)\, dx + \ldots$$

$$+ \int_a^b f_n(x)\, dx\,.$$

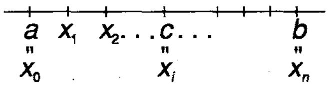
Vale também para o caso de termos diferença de funções, isto é,

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx\,.$$

6.8.6 Proposição. Se $a < c < b$ e f é integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$, então f é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx\,.$$

Prova. Consideremos uma partição no intervalo $[a, b]$ de tal forma que o ponto c $(a < c < b)$ seja um ponto da partição, isto é, $c = x_i$, para algum i.



Podemos dizer que o intervalo $[a, c]$ ficou dividido em r subintervalos e $[c, b]$ em $(n - r)$ subintervalos. Escrevemos as respectivas somas de Riemann

$$\sum_{i=1}^{r} f(c_i)\, \Delta x_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=r+1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i\,.$$

Então,

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i = \sum_{i=1}^{r} f(c_i)\, \Delta x_i + \sum_{i=r+1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i\,.$$

Usando a definição de integral definida, vem

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i \\
&= \lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \left(\sum_{i=1}^{r} f(c_i)\Delta x_i + \sum_{i=r+1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \right) \\
&= \lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{r} f(c_i)\Delta x_i + \lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=r+1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \\
&= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.
\end{aligned}$$

Esta propriedade pode ser generalizada: "Se f é integrável em um intervalo fechado e se a, b, c são pontos quaisquer desse intervalo, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,."$$

A Figura 6.5 ilustra a proposição 6.8.6, para o caso em que $f(x) > 0$. A área do trapezóide *ABCD* adicionada à área do trapezóide *BEFC* é igual à área do trapezóide *AEFD*.

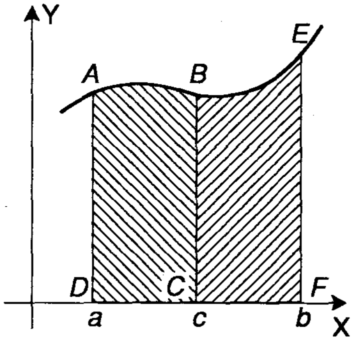


Figura 6-5

6.8.7 Proposição. Se f é integrável e se $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\ dx \geq 0\,.$$

Prova. Como $f(c_i) \geq 0$ para todo c_i em $[x_{i-1}, x_i]$, segue que

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i \geq 0\,.$$

Portanto,

$$\lim_{\text{máx}\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \geq 0$$

e dessa forma $\int_a^b f(x)\ dx \geq 0$.

6.8.8 Proposição. Se f e g são integráveis em $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x)$ para todo x em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\ dx \geq \int_a^b g(x)\ dx\,.$$

Prova. Fazemos

$$I = \int_a^b f(x)\ dx - \int_a^b g(x)\ dx\,.$$

Devemos mostrar que $I \geq 0$. Usando a proposição 6.8.5, podemos escrever

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx \\ &= \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx. \end{aligned}$$

Como $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ temos que $f(x) - g(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$.

Usando a proposição 6.8.7, concluímos que $I \geq 0$.

6.8.9 Proposição. Se f é uma função contínua em $[a, b]$, então

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Prova. Se f é contínua em $[a, b]$, então

a) f é integrável em $[a, b]$;

b) $|f|$ é contínua em $[a, b]$;

c) $|f|$ também é integrável em $[a, b]$.

Sabemos que

$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$.

Usando a proposição 6.8.8, escrevemos

$$\int_a^b -|f(x)|\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Pela proposição 6.8.4, vem

$$-\int_a^b |f(x)|\ dx \le \int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b |f(x)|\ dx\,.$$

Usando a propriedade 1.3.3(*i*), segue que

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\ dx\,.$$

Na proposição a seguir, cuja demonstração será omitida, apresentamos o Teorema do Valor Médio para integrais.

6.8.10 Proposição. Se f é uma função contínua em $[a, b]$, existe um ponto c entre a e b tal que

$$\int_a^b f(x)\ dx = (b - a)\ f(c)\,.$$

Se $f(x) \ge 0$, $\supset x \in [a, b]$, podemos visualizar geometricamente esta proposição. Ela nos diz que a área abaixo da curva $y = f(x)$, entre a e b, é igual à área de um retângulo de base $b - a$ e altura $f(c)$ (ver Figura 6.6).

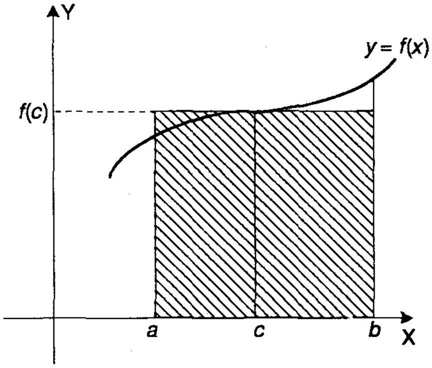


Figura 6-6

6.9 TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

O teorema fundamental do Cálculo nos permite relacionar as operações de derivação e integração. Ele nos diz que, conhecendo uma primitiva de uma função contínua $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, podemos calcular a sua integral definida $\int_a^b f(t)\, dt$. Com isso, obtemos uma maneira rápida e simples de resolver inúmeros problemas práticos que envolvem o cálculo da integral definida.

Para apresentar formalmente o teorema, inicialmente vamos definir uma importante função auxiliar, como segue.

Tomamos a integral definida

$$\int_a^b f(t)\, dt ,$$

fixamos o limite inferior a e fazemos variar o limite superior. Então, o valor da integral dependerá desse limite superior variável, que indicaremos por x. Fazendo x variar no intervalo $[a, b]$, obtemos uma função $G(x)$, dada por

$$G(x) = \int_a^x f(t)\, dt .$$

Intuitivamente, podemos compreender o significado de $G(x)$, através de uma análise geométrica. Conforme vimos na seção 6.8, se $f(t) \geq 0$, $\forall\, t \in [a, b]$, a integral

$$\int_a^b f(t)\, dt$$

representa a área abaixo do gráfico de f entre a e b (ver Figura 6.7(a)).

Da mesma forma,

$$G(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

nos dá a área abaixo do gráfico de f entre a e x (ver Figura 6.7(b)). Podemos observar que $G(a) = 0$ e $G(b)$ nos dá a área da Figura 6.7(a).

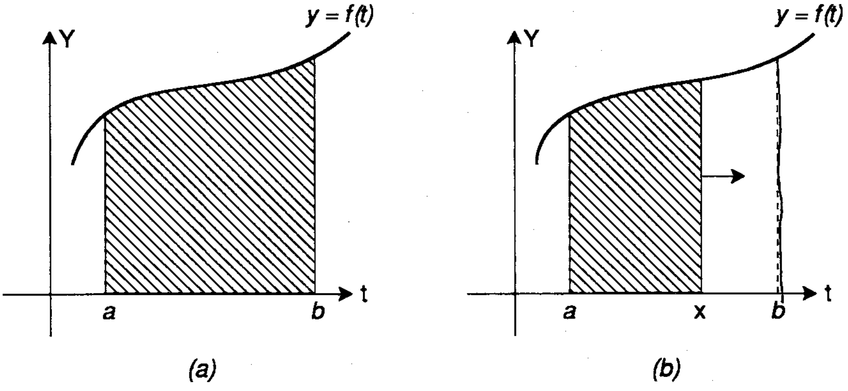


Figura 6-7

Vamos agora, determinar a derivada da função $G(x)$. Temos a seguinte proposição.

6.9.1 Proposição. Seja f uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$. Então a função $G: [a, b] \to \mathbb{R}$, definida por

$$G(x) = \int_a^x f(t)\, dt \ ,$$

tem derivada em todos os pontos $x \in [a, b]$ que é dada por

$$G\,'(x) = f(x), \text{ ou seja,}$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x) \, .$$

Prova. Vamos determinar a derivada $G\,'(x)$, usando a definição

$$G\,'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{G(x + \Delta x) - G(x)}{\Delta x} \, .$$

Temos,

$$G(x) = \int_a^x f(t)\, dt \;;$$

$$G(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\, dt \;;$$

$$G(x + \Delta x) - G(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt\,.$$

Usando a proposição 6.8.6, podemos escrever

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)\, dt = \int_a^x f(t)\, dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt$$

e então,

$$\begin{aligned} G(x + \Delta x) - G(x) &= \int_a^x f(t)\, dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt \\ &= \int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt\,. \end{aligned}$$

Como f é contínua em $[x, x + \Delta x]$, pela proposição 6.8.10, existe um ponto $\bar{x}$ entre x e $x + \Delta x$ tal que

$$\begin{aligned} \int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt &= (x + \Delta x - x)\, f(\bar{x}) \\ &= f(\bar{x})\, \Delta x\,. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{G(x + \Delta x) - G(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\bar{x})\,\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} f(\bar{x})\,.$$

Como $\bar{x}$ está entre x e $x + \Delta x$, segue que $\bar{x} \to x$ quando $\Delta x \to 0$. Como f é contínua, temos

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(\bar{x}) = \lim_{\bar{x} \to x} f(\bar{x}) = f(x)\,.$$

Logo,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{G(x + \Delta x) - G(x)}{\Delta x} = f(x)\,, \text{ ou seja,}$$

$G'(x) = f(x)$.

Observamos que quando x é um dos extremos do intervalo $[a, b]$, os limites usados na demonstração serão limites laterais. $G'(a)$ será uma derivada à direita e $G'(b)$ uma derivada à esquerda.

Uma importante conseqüência desta proposição é que toda função $f(x)$ contínua num intervalo $[a, b]$ possui uma primitiva que é dada por

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt\ .$$

Outro resultado importante obtém-se da análise geométrica. Voltando à Figura 6.7, podemos dizer que a taxa de variação da área da Figura 6.7(b) com relação a t é igual ao lado direito da região.

Podemos agora, estabelecer formalmente o Teorema Fundamental do Cálculo.

6.9.2 Teorema. Se f é contínua sobre $[a, b]$ e se F é uma primitiva de f neste intervalo, então

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a) \ .$$

Prova. Como f é contínua sobre $[a, b]$, pela proposição 6.9.1, segue que

$$G(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

é uma primitiva de f nesse intervalo.

Seja $F(x)$ uma primitiva qualquer de f sobre $[a, b]$. Pela proposição 6.1.5, temos que

$$F(x) = G(x) + C, \ \forall\, x \in [a, b].$$

Como $G(a) = \int_a^a f(t)\, dt = 0$ e $G(b) = \int_a^b f(t)\, dt$, calculando a diferença $F(b) - F(a)$, obtemos

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (G(b) + c) - (G(a) + c) \\ &= G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(t)\, dt - 0 \\ &= \int_a^b f(t)\, dt \ . \end{aligned}$$

Observamos que a diferença $F(b) - F(a)$ usualmente é denotada por $F(t) \Big|_a^b$. Também escrevemos,

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \ .$$

6.9.3 Exemplos. Calcular as integrais definidas:

(*i*) $\int_1^3 x\, dx$.

Sabemos que $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ é uma primitiva de $f(x) = x$. Portanto,

$$\int_1^3 x\, dx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_1^3 = \frac{1}{2} \cdot 3^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4\,.$$

(*ii*) $\int_0^{\pi/2} \cos t\, dt$.

A função $F(t) = \text{sen}\ t$ é uma primitiva de $f(t) = \cos t$. Logo,

$$\int_0^{\pi/2} \cos t\, dt = \text{sen}\ t \Big|_0^{\pi/2} = \text{sen}\ \frac{\pi}{2} - \text{sen}\ 0 = 1\,.$$

(*iii*) $\int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 1)\, dx$.

Usando as propriedades da integral definida e o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 1)\, dx &= \int_0^1 x^3\, dx - 4\int_0^1 x^2\, dx + \int_0^1 dx \\
&= \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 - 4 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + x\Big|_0^1 \\
&= (\frac{1}{4} - 0) - (\frac{4}{3} - 0) + (1 - 0) \\
&= -1/12.
\end{aligned}$$

(iv) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+1}$.

Vamos primeiro, encontrar a integral indefinida

$$I = \int \frac{x\,dx}{x^2+1}.$$

Para isso, fazemos a substituição $u = x^2 + 1$. Temos então, $du = 2x\,dx$ ou $x\,dx = \dfrac{du}{2}$. Portanto,

$$\begin{aligned} I = \int \frac{du/2}{u} &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln |u| + c \\ &= \frac{1}{2} \ln (x^2+1) + c. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+1} &= \frac{1}{2} \ln (x^2+1) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 1 \\ &= \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Observamos que, para resolver esta integral, também podemos fazer a mudança de variáveis na integral definida, desde que façamos a correspondente mudança nos limites de integração.

Ao efetuarmos a mudança de variável fazendo $u = x^2 + 1$, vemos que:

$x = 0 \Rightarrow u = 1$;

$x = 1 \Rightarrow u = 2$.

Então,

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+1} = \int_1^2 \frac{du/2}{u} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u|\,\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2\,.$$

(v) $\int_1^2 x\, e^{-x^2+1}\,dx$.

Calculamos primeiro a integral indefinida $I = \int x\, e^{-x^2+1}\,dx$.

Fazendo $u = -x^2 + 1$, temos $du = -2x\,dx$ ou $x\,dx = -\frac{du}{2}$. Assim,

$$I = \int e^u \cdot \frac{-du}{2} = \frac{-1}{2}\int e^u\,du = \frac{-1}{2}e^u + c$$

$$= \frac{-1}{2}e^{-x^2+1} + c\,.$$

Logo,

$$\int_1^2 x\,e^{-x^2+1}\,dx = \frac{-1}{2}e^{-x^2+1}\Big|_1^2 = \frac{-1}{2}e^{-4+1} + \frac{1}{2}e^{-1+1} = \frac{-1}{2}e^{-3} + \frac{1}{2}\,.$$

6.10 EXERCÍCIOS

1. Calculando as integrais $I_1 = \int_1^2 x^2\,dx$, $I_2 = \int_1^2 x\,dx$ e $I_3 = \int_1^2 dx$, obtemos $I_1 = 7/3$, $I_2 = 3/2$ e $I_3 = 1$. Usando estes resultados, encontrar o valor de:

a) $\int_1^2 (6x - 1)\, dx$

b) $\int_1^2 2x(x + 1)\, dx$

c) $\int_1^2 (x - 1)(x - 2)\, dx$

d) $\int_1^2 (3x + 2)^2\, dx$.

2. Sem calcular a integral, verificar as seguintes desigualdades:

a) $\int_1^3 (3x^2 + 4)\, dx \geq \int_1^3 (2x^2 + 5)\, dx$

b) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x} \leq \int_{-2}^{-1} \left(-\frac{1}{2} - \frac{x}{4} \right) dx$

c) $\int_0^{\pi} \text{sen } x\, dx \geq 0$

d) $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} -\cos x\, dx \geq 0$.

3. Se $\int_0^1 \sqrt[5]{x^2}\, dx = \frac{5}{7}$, calcular $\int_1^0 \sqrt[5]{t^2}\, dt$.

4. Se $\int_0^{\pi/2} 9\cos^2 t\, dt = \frac{9\pi}{4}$, calcular $\int_0^{\pi/2} -\cos^2 \theta\, d\theta$.

5. Verificar se o resultado das seguintes integrais é positivo, negativo ou zero, sem calculá-las.

a) $\int_0^{20} \frac{dx}{x + 2}$

b) $\int_0^{2\pi} \text{sen } t\, dt$

c) $\int_2^3 (2x + 1)\, dx$

d) $\int_{-1}^{3} (x^2 - 2x - 3)\, dx$.

6. Determinar as seguintes derivadas:

a) $\frac{d}{dx} \int_2^x \sqrt{t + 4}\, dt$

b) $\frac{d}{dy} \int_3^y \frac{2x}{x^2 + 9}\, dx$

c) $\frac{d}{d\theta} \int_{-1}^{\theta} t \text{ sen } t\, dt$

7. Em cada um dos itens abaixo, calcular a integral da função no intervalo dado e esboçar seu gráfico.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x + 5, & -1 \leq x < 0 \\ 5, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$; em [–1, 1]

b) $f(x) = |\text{sen}\, x|$; em $[-\pi, \pi]$

c) $f(x) = 2|x|$; em $[-1, 1]$

d) $f(x) = x - \dfrac{|x|}{2}$; em $[-1, 1]$

e) $f(x) = \text{sen}\, x + |\text{sen}\, x|$; em $[-\pi, \pi]$

f) $f(x) = \text{sen}\, x + |\cos x|$; em $[-\pi, \pi]$.

8. Mostrar que:

a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}\, 2x \cos 5x \, dx = 0$

b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \cos 3x \, dx = 0$

c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}\, 5x \cos 2x \, dx = 0$

(*Sugestão:* Usar as fórmulas

$\text{sen}\, mx \; \text{sen}\, nx = \dfrac{1}{2} [\cos (m - n)\, x - \cos (m + n)\, x]$,

$\text{sen}\, mx \cos nx = \dfrac{1}{2} [\text{sen}\, (m + n)\, x + \text{sen}\, (m - n)\, x]$ e

$\cos mx \cos nx = \dfrac{1}{2} [\cos (m + n)\, x + \cos (m - n)\, x]$,

onde m e n são dois inteiros quaisquer.)

9. Se $f(x)$ é contínua e $f(x) \leq M$ para todo x em $[a, b]$, provar que

$\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \leq M\, (b - a)$. Ilustrar graficamente, supondo $f(x) \geq 0$.

10. Se $f(x)$ é contínua e $m \leq f(x)$ para todo x em $[a, b]$, provar que

$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx$. Ilustrar graficamente, supondo $m > 0$.

11. Aplicar os resultados dos exercícios 9 e 10, para encontrar o menor e o maior valor possível das integrais dadas a seguir:

a) $\int_3^4 5x\,dx$ *b)* $\int_{-2}^4 2x^2\,dx$

c) $\int_1^4 |x-1|\,dx$ *d)* $\int_{-1}^4 (x^4 - 8x^2 + 16)\,dx$.

Nos exercícios de 12 a 34, calcular as integrais.

12. $\int_{-1}^2 x(1 + x^3)\,dx$ **13.** $\int_{-3}^0 (x^2 - 4x + 7)\,dx$

14. $\int_1^2 \frac{dx}{x^6}$ **15.** $\int_4^9 2t\sqrt{t}\,dt$

16. $\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{3y+1}}$ **17.** $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \operatorname{sen} x \cos x\,dx$

18. $\int_{-1}^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^3+9}}$ **19.** $\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen} x|\,dx$

20. $\int_{-2}^5 |2t - 4|\,dt$ **21.** $\int_0^4 |x^2 - 3x + 2|\,dx$

22. $\int_0^4 \frac{4}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$; **23.** $\int_{-2}^0 \frac{v^2\,dv}{(v^3-2)^2}$

24. $\int_1^5 \sqrt{2x-1}\,dx$ **25.** $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)^3}$

26. $\int_0^3 x\sqrt{1+x}\; dx$

27. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\; dx$

28. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)^5}\; dx$

29. $\int_0^4 (2x+1)^{-1/2}\; dx$

30. $\int_0^2 \sqrt{2x}\,(\sqrt{x}+\sqrt{5})\; dx$

31. $\int_1^2 \frac{5x^3+7x^2-5x+2}{x^2}\; dx$

32. $\int_1^2 x \ln x\; dx$

33. $\int_{-3}^{-2} \left(t-\frac{1}{t}\right)^2 dt$

34. $\int_0^{-1} \frac{x^3+8}{x+2}\; dx$.

35. Seja f contínua em $[-a, a]$. Mostrar que:

a) Se f é par então $\int_{-a}^{a} f(x)\; dx = 2\int_0^a f(x)\; dx$.

b) Se f é ímpar então $\int_{-a}^{a} f(x)\; dx = 0$.

36. Usar o resultado do exercício 35 para calcular:

a) $\int_{-\pi}^{\pi} 2 \operatorname{sen} x\; dx$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{\pi}\; dx$

c) $\int_{-1}^{1} (x^4+x^2)\; dx$.

6.11 CÁLCULO DE ÁREAS

O cálculo de área de figuras planas pode ser feito por integração. Vejamos as situações que comumente ocorrem.

6.11.1 Caso I. Cálculo da área da figura plana limitada pelo gráfico de f, pelas retas $x = a, x = b$ e o eixo dos x, onde f é contínua e $f(x) \geq 0, \forall\ x \in [a, b]$ (ver Figura 6.8).

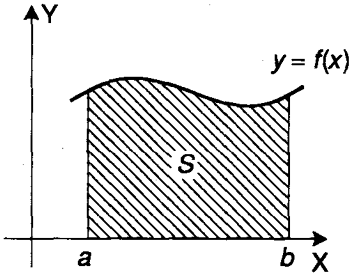


Figura 6-8

Neste caso, a área é dada por

$$A = \int_a^b f(x)\ dx\ .$$

6.11.2 Exemplo. Encontre a área limitada pela curva $y = 4 - x^2$ e o eixo dos x.

A curva $y = 4 - x^2$ intercepta o eixo dos x nos pontos de abscissa -2 e 2 (ver Figura 6.9).

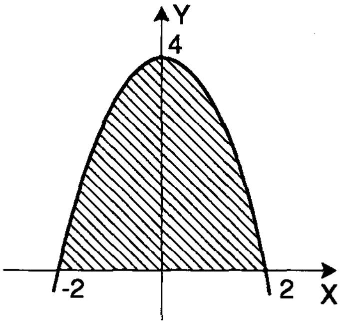


Figura 6-9

No intervalo $[-2\ ,\ 2]$, $y = 4 - x^2 \geq 0$. Assim, a área procurada é a área sob o gráfico de $y = 4 - x^2$ de -2 até 2. Temos,

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx \quad = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2}$$

$$= \left[(8 - 8/3) - \left(-8 - \frac{(-2)^3}{3}\right)\right] = \frac{32}{3}.$$

Portanto, $A = 32/3$ u · a (32/3 unidades de área).

6.11.3 Caso II. Cálculo da área da figura plana limitada pelo gráfico de f, pelas retas $x = a$, $x = b$ e o eixo dos x, onde f é contínua e $f(x) \leq 0$, $\forall\, x \in [a, b]$ (ver Figura 6.10).

É fácil constatar que neste caso basta tomar o módulo da integral

$\int_a^b f(x)\, dx$, ou seja,

$$A = \left| \int_a^b f(x)\, dx \right|.$$

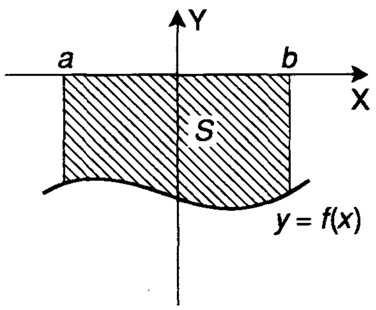


Figura 6-10

6.11.4 Exemplos.

(*i*) Encontre a área limitada pela curva $y = -4 + x^2$ e o eixo dos x.

A curva $y = x^2 - 4$ intercepta o eixo dos x nos pontos de abscissa –2 e 2 (ver Figura 6.11).

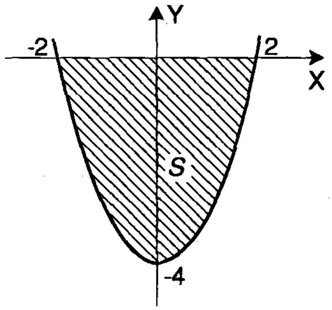


Figura 6-11

No intervalo [–2, 2], $y = x^2 - 4 \leq 0$. Assim,

$$A = \left| \int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\, dx \right|$$

$$= \left| \frac{-32}{3} \right| = \frac{32}{3} \text{ u.a.}$$

(*ii*) Encontre a área da região S, limitada pela curva $y = \text{sen } x$ e pelo eixo dos x de 0 até 2π.

Precisamos dividir a região S em duas subregiões S_1 e S_2 (ver Figura 6.12).

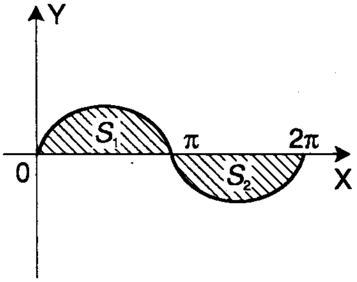


Figura 6-12

No intervalo $[0, \pi]$, $y = \text{sen}\, x \geq 0$ e no intervalo $[\pi, 2\pi]$, $y = \text{sen}\, x \leq 0$. Portanto, se A_1 é a área de S_1 e A_2 é a área de S_2, temos

$$
\begin{aligned}
A &= A_1 + A_2 \\
&= \int_0^{\pi} \text{sen}\ x\ dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen}\ x\ dx \right| \\
&= -\cos\ x \Big|_0^{\pi} + \left| -\cos\ x \Big|_{\pi}^{2\pi} \right| \\
&= -\cos \pi + \cos 0 + |-\cos 2\pi + \cos \pi| \\
&= -(-1) + 1 + |-1 + (-1)| \\
&= 4 \text{ u.a.}
\end{aligned}
$$

6.11.5 Caso III. Cálculo da área da figura plana limitada pelos gráficos de f e g, pelas retas $x = a$ e $x = b$, onde f e g são funções contínuas em $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$.

Neste caso pode ocorrer uma situação particular onde f e g assumem valores não negativos para todo $x \in [a, b]$ (ver Figura 6.13).

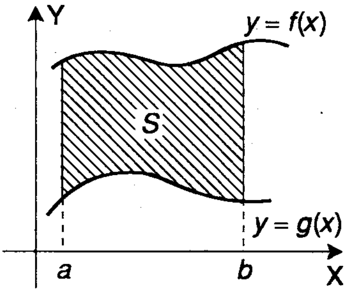


Figura 6-13

Então a área é calculada pela diferença entre a área sob o gráfico de f e a área sob o gráfico de g, ou ainda,

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

$$= \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx\,.$$

Para o caso geral, obtemos o mesmo resultado. Basta imaginar o eixo dos x deslocado de tal maneira que as funções se tornem não-negativas, $\forall\, x \in [a, b]$.

Observando a Figura 6.14, concluímos que

$$A' = A = \int_a^b (f_1(x) - g_1(x))\,dx$$

$$= \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx\,.$$

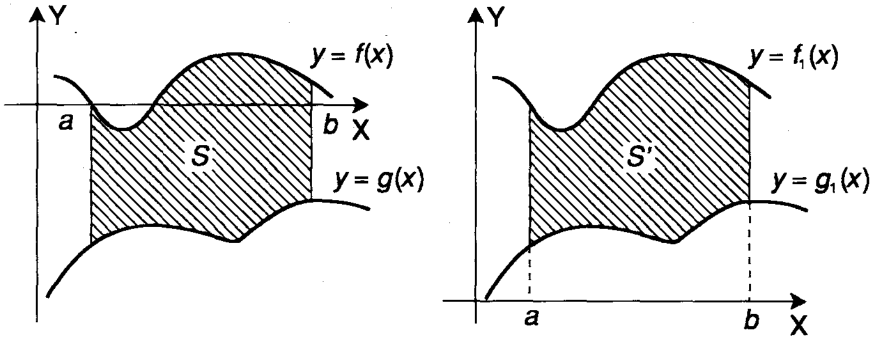


Figura 6-14

6.11.6 Exemplos

(i) Encontre a área limitada por $y = x^2$ e $y = x + 2$.

As curvas $y = x^2$ e $y = x + 2$ interceptam-se nos pontos de abscissa -1 e 2 (ver Figura 6.15).

No intervalo $[-1, 2]$, temos $x + 2 \geq x^2$. Então,

$$A = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\, dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + 2 \cdot (-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right)$$

$$= \frac{9}{2} \text{ u.a.}$$

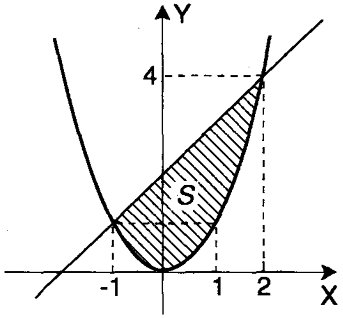


Figura 6-15

(*ii*) Encontre a área limitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = x$.

As curvas $y = x^3$ e $y = x$ interceptam-se nos pontos de abscissa -1, 0 e 1 (ver Figura 6.16).

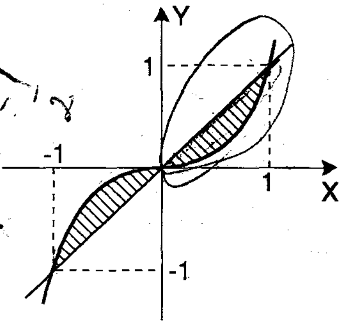


Figura 6-16

No intervalo $[-1, 0]$, $x < x^3$ e no intervalo $[0, 1]$, $x > x^3$. Logo,

$$A = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\, dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)\, dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{0}^{1}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ u.a.}$$

Observamos que poderíamos ter calculado a área da seguinte forma:

$$A = 2 \int_0^1 (x - x^3)\ dx = \frac{1}{2} \text{ u.a.},$$

pois a área à esquerda do eixo dos y é igual a que se encontra à sua direita.

(*iii*) Encontre a área da região limitada pelas curvas $y = x^2 - 1$ e $y = x + 1$.

As curvas $y = x^2 - 1$ e $y = x + 1$ interceptam-se nos pontos de abscissa -1 e 2 (ver Figura 6.17).

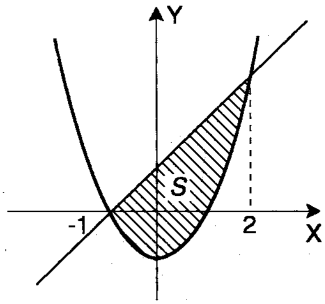


Figura 6-17

No intervalo $[-1, 2]$, $x + 1 \geq x^2 - 1$. Logo,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{2} [(x + 1) - (x^2 - 1)]\ dx \\ &= \int_{-1}^{2} (x - x^2 + 2)\ dx \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x\right)\Bigg|_{-1}^{2} \\ &= 9/2 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

(iv) Encontre a área da região S limitada pelas curvas $y - x = 6$, $y - x^3 = 0$ e $2y + x = 0$.

Devemos dividir a região em duas subregiões S_1 e S_2 (ver Figura 6.18).

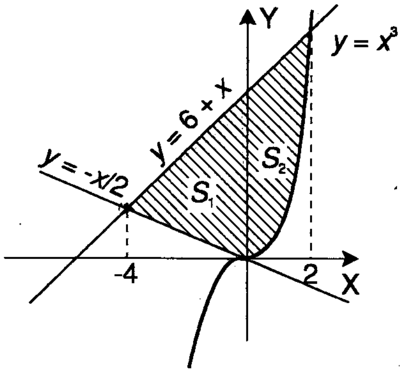


Figura 6-18

No intervalo $[-4, 0]$, a região está compreendida entre os gráficos de $y = \frac{-x}{2}$ e $y = 6 + x$ (região S_1).

No intervalo $[0, 2]$, está entre os gráficos de $y = x^3$ e $y = x + 6$ (região S_2).

Se A_1 é a área de S_1 e A_2 é a área de S_2, então a área A procurada é dada por $A = A_1 + A_2$.

Cálculo de A_1: No intervalo $[-4 , 0]$, $6 + x \geq -\frac{x}{2}$. Assim,

$$A_1 = \int_{-4}^{0} [(6 + x) - (-x/2)]\, dx$$

$$= \int_{-4}^{0} \left(6 + \frac{3x}{2}\right) dx$$

$$= \left(6x + \frac{3x^2}{4}\right)\Bigg|_{-4}^{0}$$

$$= 12 \text{ u.a.}$$

Cálculo de A_2: No intervalo [0, 2], $6 + x \geq x^3$. Então,

$$A_2 = \int_0^2 [(6 + x) - x^3]\, dx$$

$$= \left(6x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2$$

$$= 10 \text{ u.a.}$$

Portanto, $A = A_1 + A_2 = 12 + 10 = 22$ u.a.

6.12 EXERCÍCIOS

Nos exercícios de 1 a 29 encontrar a área da região limitada pelas curvas dadas.

1. $x = 1/2,\ x = \sqrt{y}$ e $y = -x + 2$
2. $y^2 = 2x$ e $x^2 = 2y$
3. $y = 5 - x^2$ e $y = x + 3$
4. $y = \frac{1}{6}x^2$ e $y = 6$
5. $y = 1 - x^2$ e $y = -3$
6. $x + y = 3$ e $y + x^2 = 3$
7. $x = y^2$, $y - x = 2$, $y = -2$ e $y = 3$
8. $y = x^3 - x$ e $y = 0$
9. $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$ e $y = 0$
10. $x = y^3$ e $x = y$

11. $y = \ln x$, $y = 0$ e $x = 4$

12. $y = \ln x$, $x = 1$ e $y = 4$

13. $y = \operatorname{sen} x$ e $y = -\operatorname{sen} x$, $x \in [0, 2\pi]$

14. $y = \cos x$ e $y = -\cos x$, $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$

15. $y = \cosh x$, $y = \operatorname{senh} x$, $x = -1$ e $x = 1$

16. $y = \operatorname{tg} x$, $x = 0$ e $y = 1$

17. $y = e^{-x}$, $y = x + 1$ e $x = -1$

18. $y = \operatorname{sen} 2x$, $y = x + 2$, $x = 0$ e $x = \pi/2$

19. $y = -1 - x^2$, $y = -2x - 4$

20. $y = \cos x$, $y = \dfrac{-3}{5\pi}x + \dfrac{3}{10}$, $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{4\pi}{3}\right]$

21. $y = \dfrac{1}{|x - 1|}$, $y = \dfrac{1}{x}$, $y = 2x + 1$ e $x = -3$

22. $x = y^2$ e $y = -\dfrac{1}{2}x$

23. $y = 4 - x^2$ e $y = x^2 - 14$

24. $x = y^2 + 1$ e $x + y = 7$

25. $y = 2^x$, $y = 2^{-x}$ e $y = 4$

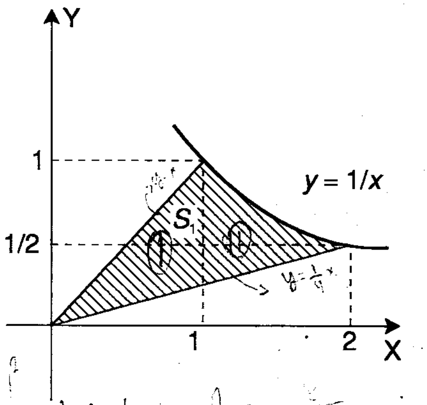
26. $y = \operatorname{arc\,sen} x$, $y = \pi/2$ e $x = 0$

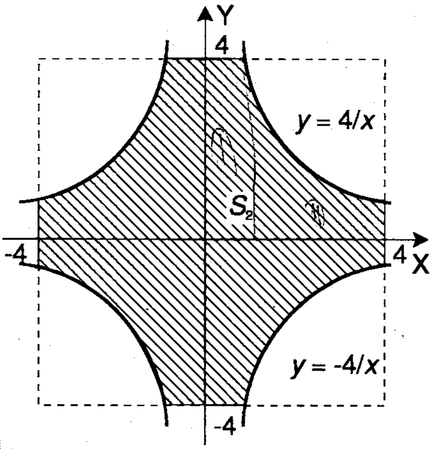
27. $y = 2\cosh\dfrac{x}{2}$, $x = -2$, $x = 2$ e $y = 0$

28. $y = |x - 2|$ e $y = 2 - (x - 2)^2$

29. $y = e^x - 1$, $y = -x$ e $x = 1$.

30. Encontrar a área das regiões S_1 e S_2, vistas na figura a seguir


Y
1
1/2
$y = 1/x$
S_1
1
2
X


Y
4
$y = 4/x$
S_2
-4
4
X
$y = -4/x$
-4

MAKRON
Books

CAPÍTULO 7

EDITORA DA UFSC

MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO

Neste capítulo, apresentaremos, inicialmente, alguns métodos utilizados para resolver integrais envolvendo funções trigonométricas.

A seguir veremos a integração por substituição trigonométrica e a integração de funções racionais por frações parciais.

Finalmente, abordaremos as integrais racionais de seno e cosseno usando a substituição universal e as integrais envolvendo raízes quadradas de trinômios do segundo grau.

7.1 INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

7.1.1 As integrais $\int \operatorname{sen} u \, du$ e $\int \cos u \, du$.

As integrais indefinidas da função seno e da função cosseno estão indicadas na tabela da Seção 6.1.9. Temos,

$$\int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + C \quad \text{e}$$

$$\int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + C .$$

7.1.2 Exemplos. Calcular as integrais:

(*i*) $\int (x + 1) \operatorname{sen} (x + 1)^2 \, dx$.

Usando o método da substituição (Seção 6.3), fazemos $u = (x + 1)^2$. Então, $du = 2\,(x + 1)\,dx$. Temos,

$$\begin{aligned} \int (x + 1) \operatorname{sen} (x + 1)^2 \, dx &= \int \frac{1}{2} \operatorname{sen} u \, du \\ &= -\frac{1}{2} \cos u + C \\ &= -\frac{1}{2} \cos (x + 1)^2 + C. \end{aligned}$$

(*ii*) $\int_0^1 e^{2x} \cos (e^{2x}) \, dx$.

Vamos primeiro, encontrar a integral indefinida

$$I = \int e^{2x} \cos (e^{2x}) \, dx.$$

Para isso, fazemos a substituição $u = e^{2x}$. Temos então, $du = 2e^{2x}\, dx$. Portanto,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{2} \cos u \, du \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sen} u + C \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sen} (e^{2x}) + C. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_0^1 e^{2x} \cos\,(e^{2x})\,dx = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,(e^{2x})\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\,(\text{sen}\,e^2 - \text{sen}\,1)\,.$$

7.1.3 As integrais $\int$ tg $u\,du$ e $\int$ cotg $u\;du$.

As integrais indefinidas da função tangente e da função cotangente são resolvidas usando o método da substituição, como foi visto no exemplo 6.3.1(*iv*). Temos,

$$\int \text{tg}\,u\;du = \int \frac{\text{sen}\;u}{\cos\;u}\,du$$

$$= -\ln\,|\cos\;u| + C$$

$$= \ln\,|(\cos\;u)^{-1}| + C$$

$$= \ln\,|\sec\;u| + C\,;$$

e

$$\int \text{cotg}\,u\;du = \int \frac{\cos\;u}{\text{sen}\;u}\,du$$

$$= \ln\,|\text{sen}\;u| + C\,.$$

7.1.4 Exemplos. Calcular as integrais

(*i*) $\displaystyle\int \frac{\text{tg}\,\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx\,.$

Fazemos $u = \sqrt{x}$. Então, $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$. Temos,

$$\int \frac{\text{tg } \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \ln |\sec \sqrt{x}| + C .$$

(*ii*) $\int \frac{\text{cotg } (\ln x)}{x} dx$.

Fazemos $u = \ln x$. Então, $du = 1/x \, dx$. Temos,

$$\int \frac{\text{cotg } (\ln x)}{x} dx = \ln |\text{sen } (\ln x)| + C .$$

7.1.5 As integrais $\int \sec u \, du$ e $\int \text{cosec } u \, du$.

Nestas integrais usamos um artifício de cálculo para podermos aplicar o método da substituição.

Na integral da secante, multiplicamos e dividimos o integrando por $\sec u + \text{tg } u$. Temos,

$$\int \sec u \, du = \int \frac{\sec u \, (\sec u + \text{tg } u)}{\sec u + \text{tg } u} du .$$

Fazemos $v = \sec u + \text{tg } u$. Então, $dv = (\sec u \cdot \text{tg } u + \sec^2 u) \, du$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\int \sec u \, du &= \int \frac{dv}{v} \\
&= \ln |v| + C \\
&= \ln |\sec u + \text{tg } u| + C .
\end{aligned}$$

Na integral da cossecante, multiplicamos e dividimos o integrando por cosec u – cotg u. Temos,

$$\int \text{cosec } u \, du = \int \frac{\text{cosec } u \, (\text{cosec } u - \text{cotg } u)}{\text{cosec } u - \text{cotg } u} \, du .$$

Fazemos $v = \text{cosec } u - \text{cotg } u$. Então,

$$\begin{aligned} dv &= [-\text{cosec } u \cdot \text{cotg } u - (-\text{cosec}^2 u)] \, du \\ &= (\text{cosec}^2 u - \text{cosec } u \cdot \text{cotg } u) \, du. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int \text{cosec } u \, du &= \int \frac{dv}{v} \\ &= \ln |v| + C \\ &= \ln |\text{cosec } u - \text{cotg } u| + C. \end{aligned}$$

7.1.6 Exemplos. Calcular as integrais

(*i*) $\int \sec (5x - \pi) \, dx .$

Fazemos $u = 5x - \pi$. Então, $du = 5dx$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int \sec (5x - \pi) \, dx &= \int \frac{1}{5} \sec u \, du \\ &= \frac{1}{5} \ln | \sec (5x - \pi) + \text{tg } (5x - \pi) | + C . \end{aligned}$$

(*ii*) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{d\,\theta}{\text{sen } 2\,\theta}$.

Vamos primeiro, encontrar a integral indefinida

$$I = \int \frac{d\,\theta}{\text{sen}\,2\,\theta}.$$

Para isso, fazemos $u = 2\theta$. Então, $du = 2d\theta$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{d\,\theta}{\text{sen}\,2\theta} &= \int \text{cosec}\,2\theta\; d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int \text{cosec}\; u\; du \\
&= \frac{1}{2}\ln|\text{cosec}\;2\theta - \text{cotg}\;2\theta| + C.
\end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{d\,\theta}{\text{sen}\,2\,\theta} &= \frac{1}{2}\ln|\text{cosec}\,2\,\theta - \text{cotg}\,2\,\theta|\,\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\text{cosec}\,\frac{2\pi}{3} - \text{cotg}\,\frac{2\pi}{3}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\text{cosec}\,\frac{\pi}{3} - \text{cotg}\,\frac{\pi}{3}\right| \\
&= \frac{1}{2}\ln 3.
\end{aligned}$$

7.2 INTEGRAÇÃO DE ALGUMAS FUNÇÕES ENVOLVENDO FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

7.2.1 As integrais $\int \text{sen}^n u\ du$ e $\int \cos^n u\ du$, onde n é um número inteiro positivo.

Nestas integrais, podemos usar artifícios de cálculo com auxílio das identidades trigonométricas

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad (1)$$

$$\text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad (2)$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \qquad (3)$$

visando a aplicação do método da substituição. Os exemplos que seguem ilustram os dois possíveis casos: n é um número ímpar ou n é um número par.

Estas integrais também podem ser resolvidas com auxílio das fórmulas de redução ou recorrência, conforme veremos na Seção 7.2.11.

7.2.2 Exemplos. Calcular as integrais

(*i*) $\int \cos^5 x\ dx$.

Vamos inicialmente preparar o integrando para a aplicação do método da substituição. Observamos que o artifício que usaremos é válido sempre que n for um número ímpar.

Fatorando convenientemente o integrando e aplicando a identidade (*1*), temos

$$\begin{aligned} \cos^5 x &= (\cos^2 x)^2 \cdot \cos x \\ &= (1 - \text{sen}^2 x)^2 \cos x \end{aligned}$$

$$= (1 - 2\,\text{sen}^2 x + \text{sen}^4 x)\cos x$$

$$= \cos x - 2\,\text{sen}^2 x \cos x + \text{sen}^4 x \cos x.$$

Portanto,

$$\int \cos^5 x\, dx = \int (\cos x - 2\,\text{sen}^2 x \cos x + \text{sen}^4 x \cos x)\, dx$$

$$= \int \cos x\, dx - 2\int \text{sen}^2 x \cos x\, dx + \int \text{sen}^4 x \cos x\, dx$$

$$= \text{sen}\, x - \frac{2}{3}\,\text{sen}^3 x + \frac{1}{5}\,\text{sen}^5 x + C.$$

(*ii*) $\int \text{sen}^3\, 2\theta\, d\theta$.

Usando o mesmo raciocínio do exemplo anterior, temos

$$\text{sen}^3\, 2\theta = \text{sen}^2\, 2\theta \cdot \text{sen}\, 2\theta$$

$$= (1 - \cos^2 2\theta)\cdot \text{sen}\, 2\theta$$

$$= \text{sen}\, 2\theta - \cos^2 2\theta\, \text{sen}\, 2\theta.$$

Portanto,

$$\int \text{sen}^3\, 2\theta\, d\theta = \int (\text{sen}\, 2\theta - \cos^2 2\theta\, \text{sen}\, 2\theta)\, d\theta$$

$$= \int \text{sen}\, 2\theta\, d\theta - \int \cos^2 2\theta\, \text{sen}\, 2\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{6}\cos^3 2\theta + C.$$

(*iii*) $\int \operatorname{sen}^4 x \, dx$.

Neste exemplo n é um número par. Na preparação do integrando, usamos agora as identidades (*2*) e (*3*). Temos,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^4 x &= (\operatorname{sen}^2 x)^2 \\
&= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) \\
&= \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2}\right) \\
&= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x .
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4 x \, dx &= \int \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x\right) dx \\
&= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C .
\end{aligned}$$

Observamos que o raciocínio usado neste exemplo é válido para as potências pares.

7.2.3 A integral $\int \operatorname{sen}^m u \cos^n u \, du$, onde m e n são inteiros positivos.

Nestas integrais, a preparação do integrando deve ser feita visando à aplicação do método da substituição, da mesma forma que foi feito em 7.2.1 e 7.2.2.

Quando pelo menos um dos expoentes é ímpar usamos a identidade (*1*) e quando os dois expoentes são pares usamos (*2*) e (*3*) e, eventualmente, também (*1*).

7.2.4 Exemplos. Calcular as integrais

(*i*) $\int \operatorname{sen}^5 x \cdot \cos^2 x \, dx$.

Preparando o integrando, temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^5 x \cos^2 x &= (\operatorname{sen}^2 x)^2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x \\
&= (1 - \cos^2 x)^2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x \\
&= (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \operatorname{sen} x \, \cos^2 x \\
&= \cos^2 x \, \operatorname{sen} x - 2\cos^4 x \, \operatorname{sen} x + \cos^6 x \, \operatorname{sen} x.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx &= \int (\cos^2 x \, \operatorname{sen} x - 2\cos^4 x \, \operatorname{sen} x + \cos^6 x \, \operatorname{sen} x) \, dx \\
&= \int \cos^2 x \, \operatorname{sen} x \, dx - 2 \int \cos^4 x \, \operatorname{sen} x \, dx \\
&\quad + \int \cos^6 x \, \operatorname{sen} x \, dx \\
&= \frac{-1}{3} \cos^3 x + \frac{2}{5} \cos^5 x - \frac{1}{7} \cos^7 x + C.
\end{aligned}$$

(*ii*) $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx$.

Preparando o integrando, temos

$$\begin{aligned}
\text{sen}^2 x \cos^4 x &= \text{sen}^2 x \cdot (\cos^2 x)^2 \\
&= \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{8}\,(1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x) \\
&= \frac{1}{8}\left[1 + \cos 2x - \frac{1 + \cos 4x}{2} - (1 - \text{sen}^2 2x) \cos 2x\right] \\
&= \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\cos 4x + \frac{1}{8}\,\text{sen}^2 2x \cos 2x .
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int \text{sen}^2 x \cos^4 x \, dx &= \int \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{16}\cos 4x + \frac{1}{8}\,\text{sen}^2 2x \cos 2x\right) dx \\
&= \frac{1}{16}\,x - \frac{1}{64}\,\text{sen}\, 4x + \frac{1}{48}\,\text{sen}^3 2x + C .
\end{aligned}$$

(*iii*) $\int \text{sen}^4 x \cos^4 x \, dx$.

Quando m e n são iguais, também podemos usar a identidade

$$\text{sen}\, x \cos x = \frac{1}{2}\,\text{sen}\, 2x . \qquad (4)$$

Temos,

$$\begin{aligned}
\text{sen}^4 x \cos^4 x &= \left(\frac{1}{2}\,\text{sen}\, 2x\right)^4 \\
&= \frac{1}{16}\,(\text{sen}^2 2x)^2
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{64}(1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x)$$

$$= \frac{1}{64}\left(1 - 2\cos 4x + \frac{1+\cos 8x}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{128} - \frac{1}{32}\cos 4x + \frac{1}{128}\cos 8x.$$

Portanto,

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x\, dx = \int \left(\frac{3}{128} - \frac{1}{32}\cos 4x + \frac{1}{128}\cos 8x\right) dx$$

$$= \frac{3}{128}x - \frac{1}{128}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{1024}\operatorname{sen} 8x + C.$$

7.2.5 As integrais $\int \operatorname{tg}^n u\, du$ e $\int \operatorname{cotg}^n u\, du$, onde n é inteiro positivo.

Na preparação do integrando, usamos as identidades

$$\operatorname{tg}^2 u = \sec^2 u - 1 \quad \text{e} \qquad (5)$$

$$\operatorname{cotg}^2 u = \operatorname{cosec}^2 u - 1. \qquad (6)$$

Os artifícios são semelhantes aos usados nas seções anteriores. Temos,

$$\operatorname{tg}^n u = \operatorname{tg}^{n-2} u \cdot \operatorname{tg}^2 u$$

$$= \operatorname{tg}^{n-2} u\,(\sec^2 u - 1)$$

e

$$\begin{aligned}\text{cotg}^n\, u &= \text{cotg}^{n-2}\, u \cdot \text{cotg}^2\, u \\ &= \text{cotg}^{n-2}\, u\, (\text{cosec}^2\, u - 1).\end{aligned}$$

7.2.6 Exemplos. Calcular as integrais

(*i*) $\int \text{tg}^3\, 3\theta\; d\theta$.

Preparando o integrando, temos

$$\begin{aligned}\text{tg}^3\, 3\theta &= \text{tg}\, 3\theta \cdot \text{tg}^2\, 3\theta \\ &= \text{tg}\, 3\theta\, (\sec^2 3\theta - 1) \\ &= \text{tg}\, 3\theta \sec^2 3\theta - \text{tg}\, 3\theta.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int \text{tg}^3\, 3\theta\; d\theta &= \int (\text{tg}\; 3\theta\; \sec^2\, 3\theta\; - \;\text{tg}\; 3\theta)\; d\theta \\ &= \frac{1}{6}\, \text{tg}^2\, 3\theta + \frac{1}{3} \ln |\cos 3\theta| + C.\end{aligned}$$

(*ii*) $\int \text{cotg}^4\, 2x\; dx$.

Preparando o integrando, temos

$$\begin{aligned}\text{cotg}^4\, 2x &= \text{cotg}^2\, 2x \cdot \text{cotg}^2\, 2x \\ &= \text{cotg}^2\, 2x\, (\text{cosec}^2\, 2x - 1)\end{aligned}$$

$$= \text{cotg}^2 2x \cdot \text{cosec}^2 2x - \text{cotg}^2 2x$$

$$= \text{cotg}^2 2x \cdot \text{cosec}^2 2x - (\text{cosec}^2 2x - 1)$$

$$= \text{cotg}^2 2x \cdot \text{cosec}^2 2x - \text{cosec}^2 2x + 1.$$

Portanto,

$$\int \text{cotg}^4\, 2x\, dx = \int (\text{cotg}^2\, 2x \cdot \text{cosec}^2\, 2x - \text{cosec}^2\, 2x + 1)\, dx$$

$$= -\frac{1}{6}\, \text{cotg}^3\, 2x + \frac{1}{2}\, \text{cotg}\, 2x + x + C.$$

7.2.7 As integrais $\int \sec^n u\, du$ e $\int \text{cosec}^n u\, du$, onde n é inteiro positivo.

Estas integrais, para o caso de n ser um número par, são resolvidas utilizando as identidades (5) e (6). Temos,

$$\sec^n x = (\sec^2 x)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \sec^2 x$$

$$= (\text{tg}^2\, x + 1)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \sec^2 x$$

e

$$\text{cosec}^n\, x = (\text{cosec}^2\, x)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \text{cosec}^2\, x$$

$$= (\text{cotg}^2\, x + 1)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \text{cosec}^2\, x.$$

Quando n for ímpar, devemos aplicar o método da integração por partes visto na Seção 6.5.

7.2.8 Exemplos. Calcular as integrais

(*i*) $\int \text{cosec}^6\, x\; dx$.

Preparando o integrando, temos

$$\begin{aligned}
\text{cosec}^6 x &= (\text{cosec}^2 x)^2 \cdot \text{cosec}^2 x \\
&= (\text{cotg}^2 x + 1)^2 \cdot \text{cosec}^2 x \\
&= (\text{cotg}^4 x + 2\,\text{cotg}^2 x + 1)\,\text{cosec}^2 x \\
&= \text{cotg}^4 x\,\text{cosec}^2 x + 2\,\text{cotg}^2 x\,\text{cosec}^2 x + \text{cosec}^2 x.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int \text{cosec}^6 x\; dx &= \int (\text{cotg}^4 x\;\text{cosec}^2 x + 2\,\text{cotg}^2 x\;\text{cosec}^2 x + \text{cosec}^2 x)\; dx \\
&= -\frac{1}{5}\,\text{cotg}^5\, x - \frac{2}{3}\,\text{cotg}^3\, x - \text{cotg}\; x + C.
\end{aligned}$$

(*ii*) $\int \sec^3\, x\; dx$.

Nesta integral, vamos usar o método de integração por partes. Seja

$$\begin{aligned}
u &= \sec x &\Rightarrow\quad du &= \sec x \cdot \text{tg}\, x\, dx \\
dv &= \sec^2 x\, dx &\Rightarrow\quad v &= \int \sec^2\, x\; dx = \text{tg}\; x.
\end{aligned}$$

Então,

$$\int \sec^3\, x\; dx = \sec\, x \cdot \text{tg}\, x - \int \text{tg}\; x \cdot \sec\; x \cdot \text{tg}\; x\; dx$$

$$= \sec x \cdot \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg}^2 x \sec x \, dx$$

$$= \sec x \cdot \operatorname{tg} x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x \, dx$$

$$= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx .$$

Adicionando $\int \sec^3 x \, dx$ a cada membro, obtemos

$$2 \int \sec^3 x \, dx = \sec x \operatorname{tg} x + \int \sec x \, dx$$

$$= \sec x \operatorname{tg} x + \ln |\sec x + \operatorname{tg} x|$$

ou

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C .$$

7.2.9 As integrais $\int \operatorname{tg}^m u \sec^n u \, du$ e $\int \operatorname{cotg}^m u \operatorname{cosec}^n u \, du$, onde m e n são inteiros positivos.

Quando m for ímpar ou n for par, podemos preparar o integrando para aplicar o método da substituição.

Quando m for par e n for ímpar a integral deve ser resolvida por integração por partes. Os exemplos que seguem ilustram os diversos casos.

7.2.10 Exemplos. Calcular as integrais

(*i*) $\int \operatorname{tg}^7 x \sec^6 x \, dx .$

Neste exemplo n é par. Podemos, então, preparar o integrando para aplicar o método da substituição. Temos,

$$\begin{aligned}
\text{tg}^7 x \sec^6 x &= \text{tg}^7 x(\sec^2 x)^2 \sec^2 x \\
&= \text{tg}^7 x(\text{tg}^2 x + 1)^2 \sec^2 x \\
&= \text{tg}^7 x\,(\text{tg}^4 x + 2\,\text{tg}^2 x + 1) \sec^2 x \\
&= \text{tg}^{11} x \;\sec^2 x + 2\,\text{tg}^9 x \;\sec^2 x + \text{tg}^7 x \;\sec^2 x.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int \text{tg}^7 x \;\sec^6 x \;dx &= \int (\text{tg}^{11} x \;\sec^2 x + 2\text{tg}^9 x \;\sec^2 x + \text{tg}^7 x \;\sec^2 x)\; dx \\
&= \frac{1}{12}\,\text{tg}^{12}\, x + \frac{1}{5}\,\text{tg}^{10}\, x + \frac{1}{8}\,\text{tg}^8\, x + C.
\end{aligned}$$

(*ii*) $\int \text{tg}^7\, x \;\sec^5\, x \;dx$.

Neste exemplo m é ímpar. Podemos, então, preparar o integrando como segue

$$\begin{aligned}
\text{tg}^7 x \;\sec^5 x &= (\text{tg}^2 x)^3\, \text{tg}\, x \;\sec^4 x \;\sec x \\
&= (\sec^2 x - 1)^3 \;\sec^4 x \;\sec x \;\text{tg}\, x \\
&= (\sec^{10} x - 3\;\sec^8 x + 3\;\sec^6 x - \sec^4 x)\;\sec x\;\text{tg}\, x.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int \text{tg}^7 x \;\sec^5 x \;dx &= \int (\sec^{10} x - 3\sec^8 x + 3\sec^6 x - \sec^4 x)\;\sec x\;\text{tg}\, x\; dx \\
&= \frac{1}{11}\sec^{11}\, x - \frac{1}{3}\sec^9\, x + \frac{3}{7}\sec^7\, x - \frac{1}{5}\sec^5\, x + C.
\end{aligned}$$

Observamos que, no exemplo (*i*), poderíamos preparar o integrando de forma idêntica à preparação do exemplo (*ii*), pois $m = 7$, isto é, m é ímpar. Os resultados seriam equivalentes.

(*iii*) $\int \text{tg}^2 x \sec^3 x \, dx$.

Reescrevendo o integrando, temos

$$\begin{aligned}\int \text{tg}^2 x \sec^3 x \, dx &= \int (\sec^2 x - 1) \sec^3 x \, dx \\ &= \int (\sec^5 x - \sec^3 x) \, dx \\ &= \int \sec^5 x \, dx - \int \sec^3 x \, dx.\end{aligned}$$

Recaímos em duas integrais que devem ser resolvidas por partes, como foi feito no exemplo 7.2.8(*ii*). Temos,

$$\begin{aligned}\int \text{tg}^2 x \sec^3 x \, dx &= \int \sec^5 x \, dx - \int \sec^3 x \, dx \\ &= \frac{1}{4} \sec^3 x \, \text{tg}\, x - \frac{1}{8} \sec x \, \text{tg}\, x \\ &\quad - \frac{1}{8} \ln |\sec x + \text{tg}\, x| + C.\end{aligned}$$

Observamos que as integrais $\int \sec^5 x \, dx$ e $\int \sec^3 x \, dx$ também podem ser calculadas usando a fórmula de recorrência que será dada na seção seguinte.

7.2.11 Fórmulas de Redução ou Recorrência.

O método de integração por partes pode ser usado para obtermos fórmulas de redução ou recorrência. A idéia é reduzir uma integral em outra mais simples do mesmo tipo. A aplicação repetida dessas fórmulas nos levará ao cálculo da integral dada.

As mais usadas são:

$$\int \text{sen}^n u \, du = \frac{-1}{n} \text{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n} \int \text{sen}^{n-2} u \, du; \qquad (7)$$

$$\int \cos^n u\ du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u \operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\ du\,; \tag{8}$$

$$\int \sec^n u\ du = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} u \operatorname{tg} u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\ du\,; \tag{9}$$

$$\int \operatorname{cosec}^n u\ du = \frac{-1}{n-1}\operatorname{cosec}^{n-2} u \operatorname{cotg} u + \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{cosec}^{n-2} u\ du\,. \tag{10}$$

Prova de (*7*). Seja

$$u^* = \operatorname{sen}^{n-1} u \quad \Rightarrow \quad du^* = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2} u \cos u\ du$$

$$dv = \operatorname{sen} u\ du \quad \Rightarrow \quad v = \int \operatorname{sen} u\ du = -\cos u\,.$$

Integrando por partes, vem

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^n u\ du &= \operatorname{sen}^{n-1} u\,(-\cos u) - \int (-\cos u)\cdot(n-1)\cdot \operatorname{sen}^{n-2} u \cdot \cos u\ du \\
&= -\operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} u \cos^2 u\ du \\
&= -\operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} u\,(1-\operatorname{sen}^2 u)\ du \\
&= -\operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + (n-1)\int (\operatorname{sen}^{n-2} u - \operatorname{sen}^n u)\ du \\
&= -\operatorname{sen}^{n-1} u \cos u - (n-1)\int \operatorname{sen}^n u\ du \\
&\quad + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} u\ du\,.
\end{aligned}$$

Somando $(n - 1) \int \text{sen}^n u \, du$ em ambos os membros, obtemos

$$n \int \text{sen}^n u \, du = - \text{sen}^{n-1} u \quad \cos u + (n - 1) \int \text{sen}^{n-2} u \, du$$

ou,

$$\int \text{sen}^n u \, du = \frac{-1}{n} \text{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n} \int \text{sen}^{n-2} u \, du ,$$

o que prova (7).

7.2.12 Exemplo. Aplicar uma fórmula de recorrência para calcular a integral

$$\int \text{sen}^5 2x \, dx .$$

Fazendo $u = 2x$, temos $du = 2 \, dx$. Então,

$$\begin{aligned}
\int \text{sen}^5 2x \, dx &= \frac{1}{2} \int \text{sen}^5 u \, du \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{5} \text{sen}^4 u \cos u + \frac{4}{5} \int \text{sen}^3 u \, du \right] \\
&= \frac{-1}{10} \text{sen}^4 u \cos u + \frac{2}{5} \left[\frac{-1}{3} \text{sen}^2 u \cos u + \frac{2}{3} \int \text{sen}\, u \, du \right] \\
&= \frac{-1}{10} \text{sen}^4 u \cos u - \frac{2}{15} \text{sen}^2 u \cos u - \frac{4}{15} \cos u + C \\
&= \frac{-1}{10} \text{sen}^4 2x \cos 2x - \frac{2}{15} \text{sen}^2 2x \cos 2x - \frac{4}{15} \cos 2x + C .
\end{aligned}$$

7.2.13 Integração de funções envolvendo seno e cosseno de arcos diferentes.

As identidades trigonométricas

$$\text{sen } a \cos b = \frac{1}{2} [\text{sen } (a + b) + \text{sen } (a - b)] \qquad (11)$$

$$\text{sen } a \text{ sen } b = \frac{1}{2} [\cos (a - b) - \cos (a + b)] \qquad (12)$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos (a + b) + \cos (a - b)] \qquad (13)$$

auxiliam na resolução de integrais envolvendo seno e cosseno de arcos diferentes. Os exemplos seguintes ilustram alguns casos.

7.2.14 Exemplos. Calcular as integrais

(*i*) $\int \text{sen } 4x \cos 2x \, dx$.

Usando (*11*), vamos preparar o integrando. Temos,

$$\text{sen } 4x \cos 2x = \frac{1}{2} [\text{sen } 6x + \text{sen } 2x] .$$

Logo,

$$\int \text{sen } 4x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \int [\text{sen } 6x + \text{sen } 2x] \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int \text{sen } 6x \, dx + \int \text{sen } 2x \, dx \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}(-\cos 6x) + \frac{1}{2}(-\cos 2x)\right] + C$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\cos 6x + \cos 2x\right] + C.$$

(*ii*) $\int \text{sen } 5x \text{ sen } 2x \, dx.$

Usando (*12*), temos

$$\int \text{sen } 5x \text{ sen } 2x \, dx = \frac{1}{2}\int [\cos 3x - \cos 7x] \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int \cos 3x \, dx - \int \cos 7x \, dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\text{sen } 3x - \frac{1}{7}\text{sen } 7x\right] + C.$$

(*iii*) $\int \cos 5x \cos 3x \, dx.$

Usando (*13*), temos

$$\int \cos 5x \cos 3x \, dx = \frac{1}{2}\int [\cos 8x + \cos 2x] \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int \cos 8x \, dx + \int \cos 2x \, dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{8}\text{sen } 8x + \frac{1}{2}\text{sen } 2x\right] + C$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\text{sen } 8x + \text{sen } 2x\right] + C .$$

7.3 INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA

Muitas vezes, substituições trigonométricas convenientes nos levam à solução de uma integral. Se o integrando contém funções envolvendo as expressões

$$\sqrt{a^2 - u^2}\ ,\ \sqrt{a^2 + u^2}\ \text{ ou }\ \sqrt{u^2 - a^2}\ ,\ \text{ onde }\ a > 0\ ,$$

é possível fazermos uma substituição trigonométrica adequada.

As Figuras 7.1 (*a*), (*b*) e (*c*) nos sugerem tal substituição.

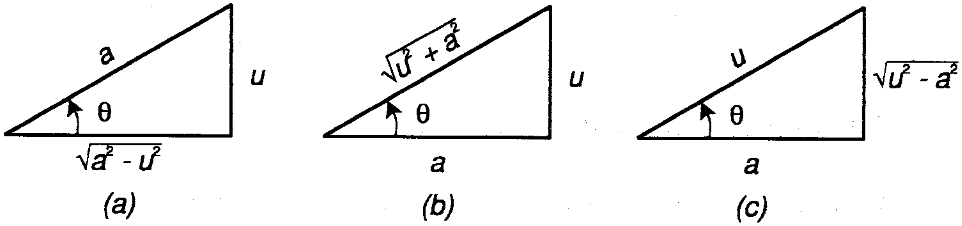


Figura 7-1

(*i*) **A função integrando envolve $\sqrt{a^2 - u^2}$.**

Neste caso, usamos $u = a$ sen θ. Então, $du = a \cos \theta\, d\theta$. Supondo que $\frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, temos

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - u^2} &= \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\\ &= \sqrt{a^2 (1 - \operatorname{sen}^2 \theta)}\\ &= \sqrt{a^2 \cos^2 \theta}\\ &= a \cos \theta.\end{aligned}$$

(*ii*) **A função integrando envolve** $\sqrt{u^2 + a^2}$ **.**

Neste caso, usamos $u = a$ tg θ. Então, $du = a \sec^2 \theta \, d\theta$. Supondo que $\frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, temos

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + u^2} &= \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \theta}\\ &= \sqrt{a^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \theta)}\\ &= \sqrt{a^2 \sec^2 \theta}\\ &= a \sec \theta.\end{aligned}$$

(*iii*) **A função integrando envolve** $\sqrt{u^2 - a^2}$ **.**

Neste caso, usamos $u = a \sec \theta$. Então, $du = a \sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta$. Supondo θ tal que $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$, temos

$$\begin{aligned}\sqrt{u^2 - a^2} &= \sqrt{a^2 \sec^2 \theta - a^2}\\ &= \sqrt{a^2 (\sec^2 \theta - 1)}\\ &= \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \theta}\\ &= a \operatorname{tg} \theta.\end{aligned}$$

7.3.1 Exemplos. Calcular as integrais

(*i*) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{2\,x^2}\, dx$.

Neste exemplo, usamos $x = 3$ sen θ. Então, $dx = 3 \cos \theta \, d\theta$. Assim,

$\sqrt{9 - x^2} = 3 \cos \theta$, para $\frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Logo,

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{2x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{3\cos\theta}{9\,\text{sen}^2\,\theta}\cdot 3\cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int \text{cotg}^2\,\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int (\text{cosec}^2\,\theta - 1)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}(-\text{cotg}\,\theta - \theta) + C.$$

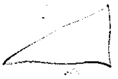
Devemos agora, escrever este resultado em termos da variável original x. Sabemos que, se $x = 3\,\text{sen}\,\theta$, $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, então $\theta = \text{arc sen}\,\frac{x}{3}$.

Observando a Figura 7.1(a), vemos que

$$\text{cotg}\,\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}.$$

Portanto,

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{2x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \text{arc sen}\,\frac{x}{3}\right) + C.$$

(ii) $\displaystyle\int \frac{x^2}{3\sqrt{x^2+4}}\,dx.$ 

Neste exemplo, usamos $x = 2\text{tg}\,\theta$. Então, $dx = 2\sec^2\theta\,d\theta$. Assim,

$$\sqrt{x^2+4} = 2\sec\theta, \quad \text{para } \frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Logo,

$$\int \frac{x^2}{3\sqrt{x^2+4}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{4\ \text{tg}^2\ \theta}{2\ \sec\ \theta}\cdot 2\ \sec^2\ \theta\ d\theta$$

$$= \frac{4}{3}\int \text{tg}^2\ \theta\ \sec\ \theta\ d\theta$$

$$= \frac{4}{3}\int (\sec^2\ \theta - 1)\ \sec\ \theta\ d\theta$$

$$= \frac{4}{3}\int (\sec^3\ \theta - \sec\ \theta)\ d\theta\,.$$

Usando a fórmula de recorrência 7.2.11(*9*), vem

$$\int \frac{x^2}{3\sqrt{x^2+4}}\,dx = \frac{4}{3}\left[\frac{1}{2}\sec\theta\ \text{tg}\,\theta + \frac{1}{2}\int \sec\theta\ d\theta - \int \sec\ \theta\,d\theta\right]$$

$$= \frac{2}{3}\sec\ \theta\ \text{tg}\ \theta - \frac{2}{3}\ln|\sec\ \theta + \text{tg}\ \theta| + C\,.$$

Vamos agora, escrever este resultado em termos da variável original x. Observando a Figura 7.1(*b*), escrevemos

$$\sec\ \theta = \frac{\sqrt{x^2+4}}{2} \quad \text{e} \quad \text{tg}\ \theta = \frac{x}{2}\cdot$$

Portanto,

$$\int \frac{x^2}{3\sqrt{x^2+4}}\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}\cdot\frac{x}{2} - \frac{2}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}+\frac{x}{2}\right| + C$$

$$= \frac{1}{6}\,x\sqrt{x^2+4} - \frac{2}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}+x}{2}\right| + C\,.$$

Este resultado poderia ainda ser escrito como

$$\int \frac{x^2}{3\sqrt{x^2+4}}\,dx = \frac{1}{6}\,x\,\sqrt{x^2+4} - \frac{2}{3}\ln\left(\sqrt{x^2+4}+x\right) + D\,,$$

onde $D = C + \dfrac{2}{3}\ln 2$.

(*iii*) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-16}}$.

Neste exemplo, usamos $x = 4\sec\theta$. Então, $dx = 4\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta$. Assim,

$\sqrt{x^2-16} = 4\,\mathrm{tg}\,\theta$, para $0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2}$ ou $\pi \le \theta < \dfrac{3\pi}{2}$.

Logo,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-16}} &= \int \frac{4\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta}{64\cdot\sec^3\theta\cdot 4\cdot\mathrm{tg}\,\theta}\\ &= \frac{1}{64}\int\frac{d\theta}{\sec^2\theta}\\ &= \frac{1}{64}\int\cos^2\theta\,d\theta\\ &= \frac{1}{64}\int\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta\\ &= \frac{1}{128}\int(1+\cos 2\theta)\,d\theta\\ &= \frac{1}{128}\left(\theta+\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2\theta\right)+C\,.\end{aligned}$$

Vamos agora, escrever este resultado em termos da variável original x. Observando a Figura 7.1(c), escrevemos

$$\text{sen } \theta = \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x}; \quad \cos \theta = \frac{4}{x}.$$

Da identidade trigonométrica

$$\frac{1}{2} \text{ sen } 2\theta = \text{sen } \theta \cos \theta$$

vem que

$$\frac{1}{2} \text{ sen } 2\theta = \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x} \cdot \frac{4}{x}.$$

Para substituirmos o valor de θ, devemos tomar algum cuidado. Inicialmente, observamos que a função integrando está definida para valores de $x > 4$ e $x < -4$.

Para $x > 4$, temos que $\sec \theta = \frac{x}{4} > 1$ e portanto, $\theta = \text{arc sec } \frac{x}{4}$, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$.

Para $x < -4$, temos que $\sec \theta = \frac{x}{4} < -1$ e sua inversa $\left(\text{arc sec } \frac{x}{4} \right)$ toma valores entre $\frac{\pi}{2}$ *e* π (ver Seção 2.15.4).

Como ao fazermos a substituição $x = 4 \sec \theta$, assumimos que $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$ e como $\sec (2\pi - a) = \sec a$, para $x < -4$, podemos escrever $\theta = 2\pi - \text{arc sec } \frac{x}{4}$, $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$.

Portanto, para $x > 4$, temos

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-16}} = \frac{1}{128}\left(\text{arc sec}\,\frac{x}{4} + \frac{4\sqrt{x^2-16}}{x^2}\right) + C$$

e para $x < -4$,

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-16}} = \frac{1}{128}\left(2\pi - \text{arc sec}\,\frac{x}{4} + \frac{4\sqrt{x^2-16}}{x^2}\right) + C_1$$

$$= \frac{1}{128}\left(-\,\text{arc sec}\,\frac{x}{4} + \frac{4\sqrt{x^2-16}}{x^2}\right) + C,$$

onde $C = \dfrac{\pi}{64} + C_1$.

7.4 EXERCÍCIOS

Nos exercícios de 1 a 35, calcular a integral indefinida.

1. $\displaystyle\int \frac{\text{sen}\,\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

2. $\displaystyle\int \cos x \cdot \cos(\text{sen}\,x)\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{\text{sen}\,2x}{\cos x}\,dx$

4. $\displaystyle\int x\,\text{tg}\,(x^2+1)\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{\text{cotg}\,(1/x)}{x^2}\,dx$

6. $\displaystyle\int \sec(x+1)\,dx$

7. $\displaystyle\int \text{sen}\,(\omega t + \theta)\,dt$

8. $\displaystyle\int x\,\text{cosec}\,x^2\,dx$

9. $\displaystyle\int \cos x \cdot \text{tg}\,(\text{sen}\,x)\,dx$

10. $\displaystyle\int \text{sen}^3\,(2x+1)\,dx$

11. $\int \cos^5 (3 - 3x)\, dx$

12. $\int 2x \operatorname{sen}^4 (x^2 - 1)\, dx$

13. $\int e^{2x} \cos^2 (e^{2x} - 1)\, dx$

14. $\int \operatorname{sen}^3 2\theta \cos^4 2\theta\, d\theta$

15. $\int \operatorname{sen}^3 (1 - 2\theta) \cos^3 (1 - 2\theta)\, d\theta$

16. $\int \operatorname{sen}^{19} (t - 1) \cos (t - 1)\, dt$

17. $\int \frac{1}{\theta} \operatorname{tg}^3 (\ln \theta)\, d\theta$

18. $\int \operatorname{tg}^3 x \cos^4 x\, dx$

19. $\int \cos^4 x\, dx$

20. $\int \operatorname{tg}^4 x\, dx$

21. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x}\, dx$

22. $\int 15 \operatorname{sen}^5 x\, dx$

23. $\int 15 \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\, dx$

24. $\int 48 \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx$

25. $\int \cos^6 3x\, dx$

26. $\int \frac{-3 \cos^2 x}{\operatorname{sen}^4 x}\, dx$

27. $\int \operatorname{sen} 3x \cos 5x\, dx$

28. $\int \operatorname{tg}^2 5x\, dx$

29. $\int \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} (\omega t + \theta)\, dt$

30. $\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}\, dx$

31. $\int \sec^4 t \operatorname{cotg}^6 t \operatorname{sen}^8 t\, dt$

32. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \operatorname{tg}^3 \sqrt{x^2 - 1}\, dx$

33. $\int \sec^3 (1 - 4x)\, dx$

34. $\int \operatorname{cosec}^4 (3 - 2x)\, dx$

35. $\int x \operatorname{cotg}^2 (x^2 - 1) \operatorname{cosec}^2 (x^2 - 1)\, dx$

36. Verificar as fórmulas de recorrência (8), (9) e (10) da Seção 7.2.11.

37. Verificar as fórmulas:

(*a*) $\int \text{tg}^n\, u\, du = \dfrac{1}{n-1}\, \text{tg}^{n-1}\, u - \int \text{tg}^{n-2}\, u\, du$

(*b*) $\int \text{cotg}^n\, u\, du = \dfrac{-1}{n-1}\, \text{cotg}^{n-1}\, u - \int \text{cotg}^{n-2}\, u\, du$

38. Calcular a área limitada pela curva $y = \cos x$, pelas retas $x = \dfrac{\pi}{2}$ e $x = \dfrac{3\pi}{2}$ e o eixo dos x.

39. Calcular a área limitada por $y = 2\,|\,\text{sen}\, x\,|$, $x = 0$, $x = 2\pi$ e o eixo dos x.

40. Calcular a área da região limitada por $y = \text{tg}^3\, x$, $y = 1$ e $x = 0$.

41. Calcular a área sob o gráfico de $y = \cos^6 x$, de 0 até π.

42. Calcular a área sob o gráfico de $y = \text{sen}^6\, x$, de 0 até π.

43. Calcular a área sob o gráfico de $y = \text{sen}^3\, x$, de 0 até π.

44. Calcular a área entre as curvas $y = \text{sen}^2\, x$ e $y = \cos^2 x$, de $\dfrac{\pi}{4}$ até $\dfrac{3\pi}{4}$.

Nos exercícios de 45 a 67, calcular a integral indefinida.

45. $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{x^2-5}}$

46. $\int \dfrac{dt}{\sqrt{9-16t^2}}$

47. $\int \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-9}}\, dx$

48. $\int (1-4t^2)^{3/2}\, dt$

49. $\int x^2\sqrt{4-x^2}\, dx$

50. $\int x^3\sqrt{x^2+3}\, dx$

51. $\int \dfrac{5x+4}{x^3\sqrt{x^2+1}}\, dx$

52. $\int (x+1)^2\sqrt{x^2+1}\, dx$

53. $\int \dfrac{t^5}{\sqrt{t^2+16}}\, dt$

54. $\int \dfrac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}\, dx$

55. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$

56. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}\,dx$

57. $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

58. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\,dx$

59. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^3}\,dx$

60. $\displaystyle\int \frac{(x+1)}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

61. $\displaystyle\int \frac{(6x+5)}{\sqrt{9x^2+1}}\,dx$

62. $\displaystyle\int \frac{(x+3)}{\sqrt{x^2+2x}}\,dx$

63. $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\,dx$

64. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-4}\,dx$

65. $\displaystyle\int \sqrt{4+x^2}\,dx$

66. $\displaystyle\int (\sqrt{1+x^2}+2x)\,dx$

67. $\displaystyle\int \left(\text{sen } x + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx$

Nos exercícios de 68 a 72, calcular a integral definida.

68. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x^2+2}}$

69. $\displaystyle\int_0^{a/2b} \sqrt{a^2-b^2x^2}\,dx\,,\ 0<a<b$

70. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t^4\sqrt{4+t^2}}$

71. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2\sqrt{9t^2+16}}$

72. $\displaystyle\int_6^7 \frac{dt}{(t-1)^2\sqrt{(t-1)^2-9}}\,.$

7.5 INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES RACIONAIS POR FRAÇÕES PARCIAIS

No Capítulo 2, vimos que uma função racional $f(x)$ é definida como o quociente de duas funções polinomiais, ou seja,

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

onde $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios.

As integrais de algumas funções racionais simples, como por exemplo

$$\frac{1}{x^2}, \quad \frac{1}{x^2+1}, \quad \frac{2x}{x^2+1}, \quad \frac{1}{x^2+6x+13}$$

são imediatas ou podem ser resolvidas por substituição e já foram vistas anteriormente.

Nesta seção, vamos apresentar um procedimento sistemático para calcular a integral de qualquer função racional. A idéia básica é escrever a função racional dada como uma soma de frações mais simples. Para isto, usaremos um resultado importante da Álgebra, que é dado na proposição seguinte.

7.5.1 Proposição. Se $p(x)$ é um polinômio com coeficientes reais, $p(x)$ pode ser expresso como um produto de fatores lineares e/ou quadráticos, todos com coeficientes reais.

7.5.2 Exemplos.

(*i*) O polinômio $q(x) = x^2 - 3x + 2$ pode ser escrito como o produto dos fatores lineares $x - 2$ e $x - 1$, ou seja, $q(x) = (x - 2)\,(x - 1)$.

(*ii*) O polinômio $q(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ pode ser expresso como o produto do fator linear $x - 1$ pelo fator quadrático irredutível $x^2 + 1$, isto é,

$$q\,(x) = (x^2 + 1)\,(x - 1).$$

(*iii*) $p(x) = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 1)^2 (x^2 + 3x + 4)$ é uma decomposição do polinômio $p(x) = 3x^5 + 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 7x + 4$.

A decomposição da função racional $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ em frações mais simples, está subordinada ao modo como o denominador $q(x)$ se decompõe nos fatores lineares e/ou quadráticos irredutíveis. Vamos considerar os vários casos separadamente. As formas das respectivas frações parciais são asseguradas por resultados da Álgebra e não serão demonstradas.

Para o desenvolvimento do método, vamos considerar que o coeficiente do termo de mais alto grau do polinômio do denominador $q(x)$ é 1. Se isso não ocorrer, dividimos o numerador e o denominador da função racional $f(x)$ por esse coeficiente.

Vamos supor, também, que o grau de $p(x)$ é menor que o grau de $q(x)$. Caso isso não ocorra, devemos primeiro efetuar a divisão de $p(x)$ por $q(x)$.

As diversas situações serão exploradas nos exemplos.

1º Caso. *Os fatores de $q(x)$ são lineares e distintos.*

Neste caso, podemos escrever $q(x)$ na forma

$$q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n),$$

onde os a_i, $i = 1, \ldots, n$, são distintos dois a dois.

A decomposição da função racional $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ em frações mais simples é dada por

$$\boxed{f(x) = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - a_n},}$$

onde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são constantes que devem ser determinadas.

7.5.3 Exemplos

(*i*) Calcular $I = \int \frac{x-2}{x^3 - 3x^2 - x + 3}\, dx$.

Solução. Temos,

$$\frac{x-2}{x^3 - 3x^2 - x + 3} = \frac{x-2}{(x-1)(x+1)(x-3)}$$

$$= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{x-3}.$$

Reduzindo novamente ao mesmo denominador, vem

$$\frac{x-2}{(x-1)(x+1)(x-3)} = \frac{(x+1)(x-3)A_1 + (x-1)(x-3)A_2 + (x-1)(x+1)A_3}{(x-1)(x+1)(x-3)}$$

$$= \frac{(x^2-2x-3)A_1 + (x^2-4x+3)A_2 + (x^2-1)A_3}{(x-1)(x+1)(x-3)}$$

$$= \frac{(A_1+A_2+A_3)x^2 + (-2A_1-4A_2)x + (-3A_1+3A_2-A_3)}{(x-1)(x+1)(x-3)}.$$

Eliminando os denominadores, obtemos

$$x - 2 = (A_1 + A_2 + A_3)\, x^2 + (-2A_1 - 4A_2)\, x + (-3A_1 + 3A_2 - A_3).$$

Igualando os coeficientes das mesmas potências de x, segue que

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 0 \\ -2A_1 - 4A_2 = 1 \\ -3A_1 + 3A_2 - A_3 = -2\,. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações, obtemos

$$A_1 = \frac{1}{4}, \; A_2 = \frac{-3}{8} \text{ e } A_3 = \frac{1}{8}.$$

Portanto, a decomposição em frações parciais é dada por

$$\frac{x-2}{(x-1)(x+1)(x-3)} = \frac{1/4}{x-1} + \frac{-3/8}{x+1} + \frac{1/8}{x-3}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x-3},$$

e então,

$$I = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{3}{8} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{8} \int \frac{dx}{x-3}$$

$$= \frac{1}{4} \ln |x-1| - \frac{3}{8} \ln |x+1| + \frac{1}{8} \ln |x-3| + C.$$

Observamos que existe outra maneira prática para determinar os valores das constantes A_1, A_2 e A_3. Eliminando os denominadores na igualdade

$$\frac{x-2}{(x-1)(x+1)(x-3)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{x-3},$$

obtemos

$$x - 2 = (x+1)(x-3)A_1 + (x-1)(x-3)A_2 + (x-1)(x+1)A_3.$$

Podemos, agora, determinar A_1, A_2 e A_3 tomando valores de x que anulem os diversos fatores, como segue:

$$x = 1 \to 1 - 2 = (1 + 1)(1 - 3)A_1 + (1 - 1)(1 - 3)A_2 + (1 - 1)(1 + 1)A_3$$

$$-1 = -4A_1$$

$$A_1 = \frac{1}{4};$$

$$x = -1 \to -1 - 2 = (-1 + 1)(-1 - 3)A_1 + (-1 - 1)(-1 - 3)A_2 + (-1 - 1)(-1 + 1)A_3$$

$$-3 = 8A_2$$

$$A_2 = \frac{-3}{8};$$

$$x = 3 \to 3 - 2 = (3 + 1)(3 - 3)A_1 + (3 - 1)(3 - 3)A_2 + (3 - 1)(3 + 1)A_3$$

$$1 = 8A_3$$

$$A_3 = \frac{1}{8}.$$

(*ii*) Calcular $I = \displaystyle\int \frac{-4x^3}{2x^3 + x^2 - 2x - 1}\,dx$.

Solução. Para resolvermos este exemplo, devemos inicialmente preparar o integrando.

Como o grau de $p(x)$ é igual ao grau de $q(x)$ efetuamos a divisão dos polinômios. Temos,

$$\frac{-4x^3}{2x^3 + x^2 - 2x - 1} = -2 + \frac{2x^2 - 4x - 2}{2x^3 + x^2 - 2x - 1}.$$

Portanto,

$$I = \int -2dx + \int \frac{2x^2 - 4x - 2}{2x^3 + x^2 - 2x - 1}\, dx$$

$$= -2x + I_1,$$

onde $I_1 = \int \frac{2x^2 - 4x - 2}{2x^3 + x^2 - 2x - 1}\, dx$.

Para resolver I_1, ainda necessitamos preparar o integrando. Dividindo o numerador e o denominador da função integrando por 2, vem

$$I_1 = \int \frac{1/2\ (2x^2 - 4x - 2)}{1/2\ (2x^3 + x^2 - 2x - 1)}\, dx$$

$$= \int \frac{x^2 - 2x - 1}{x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}}\, dx.$$

Como as raízes de $q(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}$ são $x = 1$, $x = -1/2$ e $x = -1$, temos

$$\frac{x^2 - 2x - 1}{x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}} = \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{x + 1/2} + \frac{A_3}{x + 1}.$$

Eliminando os denominadores, obtemos

$$x^2 - 2x - 1 = (x + 1/2)\,(x + 1)\,A_1 + (x - 1)\,(x + 1)\,A_2 + (x - 1)\,(x + 1/2)\,A_3\,.$$

Substituindo x pelos valores $x = 1$, $x = -1/2$ e $x = -1$, vem

$$x = 1 \quad \rightarrow \qquad -2 = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot A_1$$

$$A_1 = -\frac{2}{3};$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \qquad 1/4 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot A_2$$

$$A_2 = -\frac{1}{3};$$

$$x = -1 \quad \rightarrow \qquad 2 = -2 \cdot \frac{-1}{2} \cdot A_3$$

$$A_3 = 2.$$

Portanto,

$$\frac{x^2 - 2x - 1}{x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x + 1/2} + 2 \cdot \frac{1}{x+1},$$

e então,

$$I_1 = -\frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x + 1/2} + 2\int \frac{dx}{x+1}$$

$$= -\frac{2}{3} \ln |x - 1| - \frac{1}{3} \ln |x + 1/2| + 2 \ln |x + 1| + C_1 .$$

Logo,

$$I = -2x - \frac{2}{3} \ln |x - 1| - \frac{1}{3} \ln |x + 1/2| + 2 \ln |x + 1| + C_1$$

$$= -2x - \frac{2}{3} \ln |x-1| - \frac{1}{3} \ln |2x+1| + \frac{1}{3} \ln 2 + 2 \ln |x+1| + C_1$$

$$= -2x - \frac{2}{3} \ln |x - 1| - \frac{1}{3} \ln |2x + 1| + 2 \ln |x + 1| + C,$$

onde $C = C_1 + \frac{1}{3} \ln 2$.

2º Caso. *Os fatores de $q(x)$ são lineares sendo que alguns deles se repetem.*

Se um fator linear $x - a_i$ de $q(x)$ tem multiplicidade r, a esse fator corresponderá uma soma de frações parciais da forma

$$\boxed{\frac{B_1}{(x - a_i)^r} + \frac{B_2}{(x - a_i)^{r-1}} + \ldots + \frac{B_r}{(x - a_i)},}$$

onde $B_1, B_2, \ldots, B_r$ são constantes que devem ser determinadas.

7.5.4 Exemplos

(*i*) Calcular $\int \frac{x^3 + 3x - 1}{x^4 - 4x^2} dx$.

Solução. As raízes de $q(x)$ são $x = 2$, $x = -2$ e $x = 0$, sendo que $x = 0$ tem multiplicidade 2. Assim, o integrando pode ser escrito na forma

$$\frac{x^3 + 3x - 1}{x^4 - 4x^2} = \frac{x^3 + 3x - 1}{(x - 2)(x + 2)\, x^2}$$

$$= \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{B_1}{x^2} + \frac{B_2}{x}.$$

Eliminando os denominadores, obtemos

$$x^3 + 3x - 1 = (x+2)\,x^2 A_1 + (x-2)\,x^2 A_2 + (x-2)\,(x+2)\,B_1$$
$$+ (x-2)\,(x+2)\,x B_2 .$$

Atribuindo a x os valores $x = 2$, $x = -2$ e $x = 0$, vem

$$x=2 \quad \to \quad 13 = 4 \cdot 4 A_1, \quad A_1 = \frac{13}{16};$$

$$x=-2 \quad \to \quad -15 = -4 \cdot 4 A_2, \quad A_2 = \frac{15}{16};$$

$$x=0 \quad \to \quad -1 = -2 \cdot 2 B_1, \quad B_1 = \frac{1}{4}.$$

Por esse procedimento não conseguimos determinar o valor de B_2. Para determiná-lo, tomamos uma equação conveniente do sistema obtido igualando os coeficientes das mesmas potências de x. Usando a igualdade dos coeficientes de x^3, obtemos

$$1 = A_1 + A_2 + B_2$$

$$1 = \frac{13}{16} + \frac{15}{16} + B_2$$

$$B_2 = -\frac{3}{4}.$$

Portanto,

$$\frac{x^3 + 3x - 1}{x^4 - 4x^2} = \frac{13}{16} \cdot \frac{1}{x - 2} + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{x + 2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x},$$

e então,

$$\int \frac{x^3 + 3x - 1}{x^4 - 4x^2}\, dx = \frac{13}{16} \int \frac{dx}{x - 2} + \frac{15}{16} \int \frac{dx}{x + 2} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2} - \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{13}{16} \ln |x - 2| + \frac{15}{16} \ln |x + 2| - \frac{1}{4x} - \frac{3}{4} \ln |x| + C.$$

(*ii*) Calcular $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{8x^3 - 12x^2 + 6x - 1}\, dx$.

Vamos primeiro, encontrar a integral indefinida

$$I = \int \frac{x}{8x^3 - 12x^2 + 6x - 1}\, dx.$$

Como o coeficiente do termo de mais alto grau do polinômio do denominador é diferente de 1, para resolvermos I, necessitamos preparar o integrando. Dividindo o numerador e o denominador da função integrando por 8, vem

$$I = \int \frac{x/8}{x^3 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{3}{4} x - \frac{1}{8}}\, dx$$

$$= \frac{1}{8} \int \frac{x}{x^3 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{3}{4} x - \frac{1}{8}}\, dx.$$

O polinômio $q(x) = x^3 - \dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{3x}{4} - \dfrac{1}{8}$ tem raiz $x = \dfrac{1}{2}$ com multiplicidade 3. Assim, o integrando pode ser escrito na forma

$$\frac{x}{x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}} = \frac{A_1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^3} + \frac{A_2}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{A_3}{\left(x - \frac{1}{2}\right)}.$$

Eliminando os denominadores, vem

$$x = A_1 + \left(x - \frac{1}{2}\right)A_2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 A_3$$

$$= A_3\, x^2 + (-A_3 + A_2)\,x + \frac{1}{4}A_3 - \frac{1}{2}A_2 + A_1 .$$

Igualando os coeficientes das mesmas potências de x, segue que

$$\begin{cases} A_3 = 0 \\ A_2 - A_3 = 1 \\ A_1 - \frac{1}{2}A_2 + \frac{1}{4}A_3 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações, obtemos

$$A_1 = \frac{1}{2}\ , \quad A_2 = 1 \ \text{ e } \ A_3 = 0 .$$

Portanto, a decomposição em frações parciais é dada por

$$\frac{x}{x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}} = \frac{1}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2},$$

e então,

$$I = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1/2)^3} + \int \frac{dx}{(x-1/2)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x-1/2)^2} - \frac{1}{x-1/2}\right] + C$$

Logo,

$$\int_1^2 \frac{x}{8x^3 - 12x^2 + 6x - 1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{-1}{4(x-1/2)^2} - \frac{1}{x-1/2}\right]\Bigg|_1^2$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{-1}{4\,(2-1/2)^2} - \frac{1}{2-1/2} + \frac{1}{4\,(1-1/2)^2} + \frac{1}{1-1/2}\right]$$

$$= \frac{5}{18}.$$

Observamos que o procedimento prático adotado nos exemplos anteriores para calcular as constantes das frações parciais, não é eficiente neste exemplo, pois ele fornece apenas o valor de uma das constantes. No entanto, ele pode ser usado como ferramenta auxiliar.

3º Caso. *Os fatores de $q(x)$ são lineares e quadráticos irredutíveis, sendo que os fatores quadráticos não se repetem.*

A cada fator quadrático $x^2 + bx + c$ de $q(x)$, corresponderá uma fração parcial da forma

$$\boxed{\frac{Cx + D}{x^2 + bx + c}.}$$

7.5.5 Exemplos

(*i*) Calcular $I = \int \frac{2x^2 + 5x + 4}{x^3 + x^2 + x - 3}\, dx$.

O polinômio $q(x) = x^3 + x^2 + x - 3$ tem apenas uma raiz real, $x = 1$. Sua decomposição em fatores lineares e quadráticos é dada por

$$q(x) = (x - 1)\,(x^2 + 2x + 3).$$

Podemos, então, expressar o integrando na forma

$$\frac{2x^2 + 5x + 4}{x^3 + x^2 + x - 3} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 3}.$$

Eliminando os denominadores, vem

$$\begin{aligned} 2x^2 + 5x + 4 &= A\,(x^2 + 2x + 3) + (Cx + D)\,(x - 1) \\ &= (A + C)\,x^2 + (2A - C + D)\,x + 3A - D, \end{aligned}$$

e então,

$$\begin{cases} A + C = 2 \\ 2A - C + D = 5 \\ 3A - D = 4\,. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos

$$A = \frac{11}{6} \;;\; C = \frac{1}{6} \text{ e } D = \frac{9}{6}.$$

Portanto,

$$\frac{2x^2 + 5x + 4}{x^3 + x^2 + x - 3} = \frac{11}{6} \cdot \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{x + 9}{x^2 + 2x + 3},$$

e dessa forma,

$$\begin{aligned} I &= \frac{11}{6} \int \frac{dx}{x - 1} + \frac{1}{6} \int \frac{x + 9}{x^2 + 2x + 3}\, dx \\ &= \frac{11}{6} \ln |x - 1| + \frac{1}{6} I_1 + C, \end{aligned}$$

onde,

$$I_1 = \int \frac{x + 9}{x^2 + 2x + 3}\, dx.$$

O integrando de I_1 é uma função racional cujo denominador é um polinômio quadrático irredutível. Integrais dessa forma, aparecem freqüentemente na integração das funções racionais e podem ser resolvidas completando o quadrado do denominador e fazendo substituições convenientes.

Temos,

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 3 &= (x^2 + 2x + 1) - 1 + 3 \\ &= (x + 1)^2 + 2, \end{aligned}$$

e portanto,

$$I_1 = \int \frac{x + 9}{(x + 1)^2 + 2}\, dx\,.$$

Fazendo a substituição $u = x + 1$, temos $x = u - 1$ e $dx = du$. Então,

$$I_1 = \int \frac{u - 1 + 9}{u^2 + 2}\, du = \int \frac{u + 8}{u^2 + 2}\, du$$

$$= \int \frac{u\, du}{u^2 + 2} + 8\int \frac{du}{u^2 + 2}$$

$$= \frac{1}{2} \ln\, (u^2 + 2) + \frac{8}{\sqrt{2}} \text{ arc tg } \frac{u}{\sqrt{2}} + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln\, (x^2 + 2x + 3) + \frac{8}{\sqrt{2}} \text{ arc tg } \frac{x + 1}{\sqrt{2}} + C\,.$$

Logo,

$$I = \frac{11}{6} \ln |x - 1| + \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2} \ln\, (x^2 + 2x + 3) + \frac{8}{\sqrt{2}} \text{ arc tg } \frac{x + 1}{\sqrt{2}}\right] + C\,.$$

(*ii*) Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + x + 1)\,(x^2 + 4x + 5)}$

Vamos primeiro, calcular a integral indefinida

$$I = \int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)\,(x^2 + 4x + 5)}\,.$$

O polinômio $q(x) = (x^2 + x + 1)\,(x^2 + 4x + 5)$ não possui raízes reais e já se encontra decomposto em fatores quadráticos irredutíveis. Podemos, então, escrever o integrando na forma

$$\frac{1}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 4x + 5)} = \frac{C_1 x + D_1}{x^2 + x + 1} + \frac{C_2 x + D_2}{x^2 + 4x + 5}.$$

Eliminando os denominadores, vem

$$\begin{aligned} 1 &= (C_1\,x + D_1)\,(x^2 + 4x + 5) + (C_2\,x + D_2)\,(x^2 + x + 1) \\ &= (C_1 + C_2)\,x^3 + (4C_1 + C_2 + D_1 + D_2)\,x^2 \\ &\quad + (5C_1 + C_2 + 4D_1 + D_2)\,x + 5D_1 + D_2, \end{aligned}$$

e então,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 4C_1 + C_2 + D_1 + D_2 = 0 \\ 5C_1 + C_2 + 4D_1 + D_2 = 0 \\ 5D_1 + D_2 = 1\,. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos

$$C_1 = -\frac{3}{13}\ ;\ C_2 = \frac{3}{13}\ ;\ D_1 = \frac{1}{13}\ \text{e}\ D_2 = \frac{8}{13}.$$

Portanto,

$$\frac{1}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 4x + 5)} = \frac{1}{13}\cdot\frac{-3x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{13}\cdot\frac{3x + 8}{x^2 + 4x + 5},$$

e assim,

$$I = \frac{1}{13}\int \frac{-3x + 1}{x^2 + x + 1}\,dx + \frac{1}{13}\int \frac{3x + 8}{x^2 + 4x + 5}\,dx\,.$$

Completando os quadrados dos denominadores, vem

$$I = \frac{1}{13}\left[\int \frac{-3x+1}{(x+1/2)^2+3/4}\,dx + \int \frac{3x+8}{(x+2)^2+1}\,dx\right].$$

Fazendo a substituição $u = x + 1/2$ na primeira integral e $v = x + 2$ na segunda, obtemos

$$I =$$

$$= \frac{1}{13}\left[\int \frac{-3(u-1/2)+1}{u^2+3/4}\,du + \int \frac{3(v-2)+8}{v^2+1}\,dv\right]$$

$$= \frac{1}{13}\left[-3\int \frac{u\,du}{u^2+3/4} + \frac{5}{2}\int \frac{du}{u^2+3/4} + 3\int \frac{v\,dv}{v^2+1} + 2\int \frac{dv}{v^2+1}\right]$$

$$= \frac{1}{13}\left[-\frac{3}{2}\ln(u^2+3/4) + \frac{5}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\,\frac{2}{\sqrt{3}}u + \frac{3}{2}\ln(v^2+1) + 2\,\text{arc tg}\,v\right] + C$$

$$= \frac{1}{13}\left[-\frac{3}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{5\sqrt{3}}{3}\,\text{arc tg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right.$$

$$\left. + \frac{3}{2}\ln(x^2+4x+5) + 2\,\text{arc tg}\,(x+2)\right] + C.$$

Logo,

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+x+1)(x^2+4x+5)} = \frac{1}{13}\left[-\frac{3}{2}\ln 3 + \frac{5\sqrt{3}}{3}\,\text{arc tg}\,\frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{3}{2}\ln 10\right.$$

$$\left. + 2\,\text{arc tg}\,3 - \frac{5\sqrt{3}}{3}\,\text{arc tg}\,\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{3}{2}\ln 5 - 2\,\text{arc tg}\,2\right]$$

$$= \frac{1}{13}\left[\frac{3}{2}\ln\frac{2}{3} + \frac{5\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{3} + 2 \text{ arc tg } 3 - \frac{5\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{6} - 2 \text{ arc tg } 2\right]$$

$$= \frac{1}{13}\left[\frac{3}{2}\ln\frac{2}{3} + \frac{5\sqrt{3}}{18}\pi + 2 \text{ arc tg } 3 - 2 \text{ arc tg } 2\right].$$

4º Caso. *Os fatores de $q(x)$ são lineares e quadráticos irredutíveis sendo que alguns dos fatores quadráticos se repetem.*

Se um fator quadrático $x^2 + bx + c$ de $q(x)$ tem multiplicidade s, a esse fator corresponderá uma soma de frações parciais da forma

$$\frac{C_1x + D_1}{(x^2 + bx + c)^s} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2 + bx + c)^{s-1}} + \dots + \frac{C_sx + D_s}{x^2 + bx + c}$$

7.5.6 Exemplos

(*i*) Calcular $I = \int \frac{x + 1}{x(x^2 + 2x + 3)^2}\, dx$.

O integrando pode ser escrito na forma

$$\frac{x + 1}{x(x^2 + 2x + 3)^2} = \frac{A}{x} + \frac{C_1x + D_1}{(x^2 + 2x + 3)^2} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2 + 2x + 3)}.$$

Eliminando os denominadores, vem

$$\begin{aligned} x + 1 &= A(x^2 + 2x + 3)^2 + x(C_1x + D_1) + x(x^2 + 2x + 3)(C_2x + D_2) \\ &= (A + C_2)x^4 + (4A + 2C_2 + D_2)x^3 + (10A + C_1 + 3C_2 + 2D_2)x^2 \\ &\quad + (12A + D_1 + 3D_2)x + 9A, \end{aligned}$$

e então,

$$\begin{cases} A + C_2 = 0 \\ 4A + 2C_2 + D_2 = 0 \\ 10A + C_1 + 3C_2 + 2D_2 = 0 \\ 12A + D_1 + 3D_2 = 1 \\ 9A = 1\,. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos

$$A = \frac{1}{9}\ ;\ C_1 = -\frac{1}{3}\ ;\ D_1 = \frac{1}{3}\ ;\ C_2 = \frac{-1}{9}\ ;\ D_2 = \frac{-2}{9},$$

e assim,

$$\frac{x+1}{x(x^2+2x+3)^2} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\cdot\frac{-x+1}{(x^2+2x+3)^2} + \frac{1}{9}\cdot\frac{-x-2}{x^2+2x+3}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{9}\int\frac{dx}{x} + \frac{1}{3}\int\frac{-x+1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx - \frac{1}{9}\int\frac{x+2}{x^2+2x+3}\,dx \\ &= \frac{1}{9}\ln|x| + \frac{1}{3}I_1 - \frac{1}{9}I_2, \end{aligned}$$

onde $I_1 = \int\frac{-x+1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx$ e $I_2 = \frac{x+2}{x^2+2x+3}\,dx$.

A integral I_2 é análoga às que foram resolvidas no decorrer dos exemplos do 3º Caso. Como naqueles exemplos, para resolvê-la, completamos o quadrado do denominador e fazemos uma substituição conveniente. Temos,

$$I_2 = \int\frac{x+2}{x^2+2x+3}\,dx = \int\frac{x+2}{(x+1)^2+2}\,dx.$$

Fazendo a substituição $u = x + 1$; $x = u - 1$ e $dx = du$, vem

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{u+1}{u^2+2}\,du \\
&= \int \frac{u}{u^2+2}\,du + \int \frac{du}{u^2+2} \\
&= \frac{1}{2}\ln(u^2+2) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{\sqrt{2}} + C \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.
\end{aligned}
$$

Uma integral como I_1 não foi vista anteriormente. Para calculá-la, inicialmente, completamos o quadrado do denominador e fazemos a mesma substituição que fizemos para calcular I_2. Temos,

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{-x+1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx \\
&= \int \frac{-x+1}{[(x+1)^2+2]^2}\,dx \\
&= \int \frac{-u+2}{(u^2+2)^2}\,du \qquad \text{(onde } u = x+1\text{)} \\
&= \int \frac{-u}{(u^2+2)^2}\,du + 2\int \frac{du}{(u^2+2)^2} \\
&= \frac{1}{2(u^2+2)} + 2\int \frac{du}{(u^2+2)^2}.
\end{aligned}
$$

Para resolver a integral $\int \frac{du}{(u^2+2)^2}$, podemos recorrer a uma substituição trigonométrica como foi visto em 7.3. Fazemos $u = \sqrt{2}\ \operatorname{tg}\theta$. Então $du = \sqrt{2}\sec^2\theta\, d\theta$. Assim,

$$\int \frac{du}{(u^2+2)^2} = \int \frac{\sqrt{2}\sec^2\theta\, d\theta}{(2\,\text{tg}^2\,\theta+2)^2}$$

$$= \int \frac{\sqrt{2}\sec^2\theta\, d\theta}{4\sec^4\theta}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{d\theta}{\sec^2\theta}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\int \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{2}\cos\theta\, sen\,\theta + \frac{1}{2}\theta\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}(\cos\theta\,\text{sen}\,\theta+\theta)\,.$$

Para retornar à variável anterior u, observamos a Figura 7.2. Temos,

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+u^2}}\,;$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{u}{\sqrt{2+u^2}}\,;$$

$$\theta = \text{arc tg}\,\frac{u}{\sqrt{2}}\,.$$

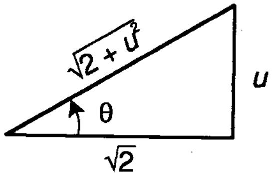


Figura 7-2

Portanto,

$$\int \frac{du}{(u^2+2)^2} = \frac{\sqrt{2}}{8}\left[\frac{\sqrt{2}\,u}{2+u^2} + \text{arc tg}\,\frac{u}{\sqrt{2}}\right] + C$$

e então,

$$I_1 = \frac{1}{2(u^2+2)} + \frac{2\sqrt{2}}{8}\left[\frac{\sqrt{2}\,u}{2+u^2} + \text{arc tg}\,\frac{u}{\sqrt{2}}\right] + C.$$

Retornando à variável original x, vem

$$I_1 = \frac{1}{2(x^2+2x+3)} + \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\frac{\sqrt{2}\,(x+1)}{x^2+2x+3} + \text{arc tg}\,\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right] + C.$$

Substituindo os resultados obtidos para I_1 e I_2 na integral I, obtemos

$$I = \frac{1}{9}\ln|x| + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2(x^2+2x+3)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+3} + \frac{\sqrt{2}}{4}\,\text{arc tg}\,\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$-\frac{1}{9}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{arc tg}\,\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right] + C$$

$$= \frac{1}{9}\ln|x| + \frac{x+2}{6(x^2+2x+3)} + \frac{\sqrt{2}}{36}\,\text{arc tg}\,\frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{18}\ln(x^2+2x+3) + C.$$

Na resolução das integrais de funções racionais que se enquadram no 4º Caso, normalmente aparecem integrais da forma

$$\int \frac{du}{(u^2+a^2)^n}, \quad n \geq 1.$$

Se $n = 1$, esta integral nos dá arco tangente. No exemplo a seguir, encontramos uma fórmula de recorrência para esta integral, para $n > 1$.

(*ii*) Determinar uma fórmula de recorrência para $I_n = \int \frac{du}{(u^2+a^2)^n}$, $n > 1$.

Inicialmente, vamos escrever a integral dada na seguinte forma conveniente:

$$I_n = \frac{1}{a^2} \int \frac{(a^2 + u^2) - u^2}{(u^2 + a^2)^n}\, du$$

$$= \frac{1}{a^2} \left[\int \frac{du}{(u^2 + a^2)^{n-1}} - \int \frac{u^2}{(u^2 + a^2)^n}\, du \right].$$

Agora, vamos usar integração por partes para resolver a segunda integral. Temos,

$$\int \frac{u^2}{(u^2 + a^2)^n}\, du = \int u \cdot \frac{u}{(u^2 + a^2)^n}\, du.$$

Fazendo $u^* = u \quad \Rightarrow \quad du^* = du$

$$dv = \frac{u\, du}{(u^2 + a^2)^n} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{(u^2 + a^2)^{1-n}}{2(1-n)},$$

vem

$$\int \frac{u^2}{(u^2 + a^2)^n}\, du = \frac{u(u^2 + a^2)^{1-n}}{2(1-n)} - \int \frac{(u^2 + a^2)^{1-n}}{2(1-n)}\, du$$

$$= \frac{u(u^2 + a^2)^{1-n}}{2(1-n)} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{du}{(u^2 + a^2)^{n-1}}.$$

Substituindo este resultado na expressão geral de I_n, obtemos

$$I_n = \frac{1}{a^2} \left[\int \frac{du}{(u^2 + a^2)^{n-1}} - \frac{u(u^2 + a^2)^{1-n}}{2(1-n)} - \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{du}{(u^2 + a^2)^{n-1}} \right]$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[\frac{u\,(u^2 + a^2)^{1-n}}{2\,(n-1)} + \frac{2\,(n-1)-1}{2\,(n-1)}\int \frac{du}{(u^2 + a^2)^{n-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[\frac{u\,(u^2 + a^2)^{1-n}}{2\,(n-1)} + \frac{2n-3}{2\,(n-1)}\int \frac{du}{(u^2 + a^2)^{n-1}}\right].$$

Logo,

$$\boxed{\int \frac{du}{(u^2 + a^2)^n} = \frac{u\,(u^2 + a^2)^{1-n}}{2a^2\,(n-1)} + \frac{2n-3}{2a^2\,(n-1)}\int \frac{du}{(u^2 + a^2)^{n-1}}.}$$

(*iii*) Calcular $I = \int \frac{dx}{(4x^2 + 8x + 13)^3}$.

A integral I pode ser reescrita na forma

$$I = \int \frac{dx}{[\,4\,(x^2 + 2x + 1) + 9\,]^3}$$

$$= \int \frac{dx}{[\,(2x + 2)^2 + 9\,]^3}.$$

Fazendo a substituição $u = 2x + 2$; $du = 2dx$, obtemos

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{du}{(u^2 + 3^2)^3}.$$

Utilizando a fórmula de recorrência do exemplo anterior, vem

$$I = \frac{1}{2}\left[\frac{u\,(u^2 + 9)^{-2}}{2\cdot 9\cdot 2} + \frac{3}{2\cdot 9\cdot 2}\int \frac{du}{(u^2 + 9)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{u}{36\,(u^2+9)^2} + \frac{3}{36}\left[\frac{u\,(u^2+9)^{-1}}{2\cdot 9\cdot 1} + \frac{1}{2\cdot 9\cdot 1}\int \frac{du}{u^2+9}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{u}{36\,(u^2+9)^2} + \frac{3}{36}\left[\frac{u}{18\,(u^2+9)} + \frac{1}{18}\cdot\frac{1}{3}\text{ arc tg }\frac{u}{3}\right]\right\} + C$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{2x+2}{36\,(4x^2+8x+13)^2} + \frac{3}{36}\left[\frac{2x+2}{18\,(4x^2+8x+13)} + \frac{1}{54}\text{ arc tg }\frac{2x+2}{3}\right]\right\} + C$$

$$= \frac{x+1}{36\,(4x^2+8x+13)^2} + \frac{1}{12}\left[\frac{x+1}{18\,(4x^2+8x+13)} + \frac{1}{108}\text{ arc tg }\frac{2x+2}{3}\right] + C.$$

7.6 EXERCÍCIOS

Nos exercícios de 1 a 23, calcular a integral indefinida.

1. $\int \frac{2x^3}{x^2+x}\,dx$

2. $\int \frac{2x+1}{2x^2+3x-2}\,dx$

3. $\int \frac{x-1}{x^3+x^2-4x-4}\,dx$

4. $\int \frac{3x^2}{2x^3-x^2-2x+1}\,dx$

5. $\int \frac{x^2+5x+4}{x^2-2x+1}\,dx$

6. $\int \frac{x-1}{(x-2)^2(x-3)^2}\,dx$

7. $\int \frac{(x^2+1)}{x^4-7x^3+18x^2-20x+8}\,dx$

8. $\int \frac{dx}{x^3-4x^2}$

9. $\int \frac{x^3+2x^2+4}{2x^2+2}\,dx$

10. $\int \frac{5\,dx}{x^3+4x}$

11. $\displaystyle\int \frac{3x - 1}{x^2 - x + 1}\, dx$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 + 8}$

13. $\displaystyle\int \frac{x - 1}{(x^2 + 2x + 3)^2}\, dx$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\,(x^2 - x + 1)^2}$

15. $\displaystyle\int \frac{4x^4}{x^4 - x^3 - 6x^2 + 4x + 8}\, dx$

16. $\displaystyle\int \frac{x^2}{3x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}\, dx$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 + 9x}$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$

19. $\displaystyle\int \frac{x^3 + x^2 + 2x + 1}{x^3 - 1}\, dx$

20. $\displaystyle\int \frac{x^3\, dx}{(x^2 + 2)^2}$

21. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x}$

22. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{(x - 1)^2 (x + 1)^2}$

23. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x - 1}{(x - 1)^2 (x^2 + 1)}\, dx$

24. Verificar a fórmula $\displaystyle\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u + a}{u - a} \right| + C$

25. Calcular a área da região limitada pelas curvas

$$y = \frac{1}{(x - 1)(x - 4)}\ , \quad y = \frac{1}{(1 - x)(x - 4)}\ , \quad x = 2 \ \text{ e } \ x = 3\,.$$

26. Calcular a área da região sob o gráfico de $y = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 5}$, de $x = -2$ até $x = 2$.

27. Calcular a área da região sob o gráfico de $y = \dfrac{-1}{x^2\,(x-5)}$, de $x = 1$ até $x = 4$.

28. Calcular a área da região sob o gráfico de $y = \dfrac{1}{(x^2+3)^2}$, de $x = -2$ até $x = 2$.

7.7 INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES RACIONAIS DE SENO E COSSENO

Quando temos uma integral da forma

$$\int R\,(\cos x,\ \operatorname{sen} x)\ dx\,,$$

isto é, o integrando é uma função racional de sen x e cos x, a integral dada pode ser reduzida a uma integral de uma função racional de uma nova variável t. Para isso, fazemos a substituição.

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\ ,\quad -\pi < x < \pi\ . \tag{1}$$

Para exprimir a função integrando em termos da nova variável t, precisamos encontrar cos x, sen x e dx em função de t. Temos,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x &= \frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1}\\[2ex]
&= \frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}\\[2ex]
&= \frac{\left(2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\Big/\cos^2\frac{x}{2}}{\left(\cos^2\frac{x}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right)\Big/\cos^2\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{2t}{1 + t^2};$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{1}$$

$$= \frac{\left(\cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}\right) / \cos^2 \frac{x}{2}}{\left(\cos^2 \frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}\right) / \cos^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Além disso, como $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, temos $x = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} t$, e assim, $dx = \frac{2\,dt}{1 + t^2}$.

Portanto, quando fazemos a substituição $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, podemos utilizar as fórmulas

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1 + t^2}; \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \text{e} \quad dx = \frac{2\,dt}{1 + t^2}. \tag{2}$$

Observamos que a substituição (*I*) transforma qualquer integral de função racional de seno e cosseno, numa integral de função racional de t. Por isso, ela também é conhecida como a "substituição universal" para a integração de expressões trigonométricas.

7.7.1 Exemplos

(*i*) Calcular $I = \int \frac{dx}{3 + 5\cos x}$.

Fazendo $x = \text{tg}\,\frac{t}{2}$ e usando (*2*), vem

$$I = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{3 + 5\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{3 + 3t^2 + 5 - 5t^2}{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{2\,dt}{8 - 2t^2}$$

$$= -\int \frac{dt}{t^2 - 4}.$$

Resolvendo esta integral pelo método das frações parciais, vem

$$I = -\left[-\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t+2} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t-2}\right]$$

$$= \frac{1}{4} \ln |t + 2| - \frac{1}{4} \ln |t - 2| + C$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t + 2}{t - 2} \right| + C .$$

Finalmente, substituindo $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, obtemos

$$I = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2} \right| + C .$$

(*ii*) Calcular $I = \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x + 2}$.

Usando a substituição $x = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$ e (2), vem

$$I = \int \frac{\frac{2\,dt}{1 + t^2}}{\frac{2t}{1 + t^2} + \frac{1 - t^2}{1 + t^2} + 2}$$

$$= \int \frac{\frac{2\,dt}{1 + t^2}}{\frac{2t + 1 - t^2 + 2 + 2t^2}{1 + t^2}}$$

$$= \int \frac{2\,dt}{t^2 + 2t + 3}$$

$$= 2\int \frac{dt}{(t+1)^2+2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \text{ arc tg} \left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$= \sqrt{2} \text{ arc tg} \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(t+1)\right] + C.$$

Substituindo $t = \text{tg}\ \frac{x}{2}$, obtemos

$$I = \sqrt{2} \text{ arc tg} \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\text{tg}\ \frac{x}{2} + 1\right)\right] + C.$$

7.8 INTEGRAIS ENVOLVENDO EXPRESSÕES DA FORMA $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ $(a \neq 0)$

Algumas integrais que envolvem a expressão $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, podem ser resolvidas usando-se uma substituição conveniente.

Podemos completar o quadrado do trinômio $ax^2 + bx + c$, para visualizar a substituição.

Os exemplos seguintes apresentam casos onde, após a substituição, a integral recai numa integral tabelada ou numa integral de um dos tipos apresentados anteriormente.

7.8.1 Exemplos

(*i*) Calcular $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 8x + 15}}$.

Vamos completar o quadrado do trinômio $x^2 + 8x + 15$. Temos,

$$x^2 + 8x + 15 = (x + 4)^2 - 1.$$

Neste caso, a substituição conveniente é

$$u = x + 4 \quad ; \quad du = dx,$$

que transforma a integral I numa integral tabelada (ver 6.1.10 – (22)).

Temos,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} \\ &= \arg\cosh u + C \\ &= \ln \left| u + \sqrt{u^2 - 1} \right| + C. \end{aligned}$$

Portanto,

$$I = \arg\cosh (x + 4) + C \quad \text{ou}$$

$$I = \ln \left| x + 4 + \sqrt{x^2 + 8x + 15} \right| + C.$$

(*ii*) Calcular $I = \displaystyle\int \frac{3x + 2}{\sqrt{9 - 16x - 4x^2}}\, dx$.

Temos,

$$9 - 16x - 4x^2 = 25 - (2x + 4)^2.$$

Logo,

$$I = \int \frac{3x + 2}{\sqrt{25 - (2x + 4)^2}} \, dx .$$

Para resolver esta integral, podemos usar uma substituição trigonométrica (ver Seção 7.3). Temos,

$$2x + 4 = 5 \operatorname{sen} \theta , \qquad \frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} ;$$

$$dx = \frac{5}{2} \cos \theta \, d\theta \quad \text{e}$$

$$\sqrt{25 - (2x + 4)^2} = 5 \cos \theta .$$

Logo,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3\,(5/2 \operatorname{sen} \theta - 2) + 2}{5 \cos \theta} \cdot \frac{5}{2} \cos \theta \, d\theta \\ &= \int \left(\frac{15}{4} \operatorname{sen} \theta - 2 \right) d\theta \\ &= -\frac{15}{4} \cos \theta - 2\theta + C . \end{aligned}$$

Como $2x + 4 = 5 \operatorname{sen} \theta$, temos que $\operatorname{sen} \theta = \dfrac{2x + 4}{5}$; $\theta = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{2x + 4}{5}$ e $\cos \theta = \dfrac{1}{5} \sqrt{25 - (2x + 4)^2}$.

Portanto,

$$I = -\frac{15}{4} \cdot \frac{1}{5} \sqrt{25 - (2x + 4)^2} - 2 \text{ arc sen} \left(\frac{2x + 4}{5} \right) + C$$

$$= -\frac{3}{4} \sqrt{9 - 16x - 4x^2} - 2 \text{ arc sen} \left(\frac{2x + 4}{5} \right) + C .$$

A seguir apresentamos outras substituições usadas para a resolução deste tipo de integral.

Temos os seguintes casos:

(a) ***O trinômio $ax^2 + bx + c$ apresenta $a > 0$.***

Neste caso, podemos usar

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{a}\, x + t . \qquad (1)$$

(b) ***O trinômio $ax^2 + bx + c$ apresenta $c > 0$.***

Neste caso, podemos usar

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c} . \qquad (2)$$

(c) ***O trinômio $ax^2 + bx + c$ tem raízes reais.***

Usamos, para este caso, a substituição

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - r)\, t , \qquad (3)$$

onde r é qualquer uma das raízes do trinômio $ax^2 + bx + c$.

Os exemplos seguintes mostram esses casos.

7.8.2 Exemplos

(*i*) Calcular $I = \int \dfrac{dx}{x\sqrt{4x^2 + x - 3}}$.

Neste caso, o trinômio apresenta $a = 4 > 0$ e raízes reais. Portanto, podemos escolher entre as substituições dos casos (*a*) e (*c*).

Vamos escolher o caso (*a*), usando o sinal positivo de (*1*). Temos,

$$\sqrt{4x^2 + x - 3} = 2x + t.$$

Então,

$$\begin{aligned} 4x^2 + x - 3 &= (2x + t)^2 \\ 4x^2 + x - 3 &= 4x^2 + 4x\,t + t^2 \\ x - 4x\,t &= t^2 + 3 \\ x(1 - 4t) &= t^2 + 3 \\ x &= \frac{t^2 + 3}{1 - 4t}; \\ dx &= \frac{-4t^2 + 2t + 12}{(1 - 4t)^2}\,dt \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sqrt{4x^2 + x - 3} &= 2 \cdot \frac{t^2 + 3}{1 - 4t} + t \\ &= \frac{-2t^2 + t + 6}{1 - 4t}. \end{aligned}$$

Substituindo essas expressões na integral, vem

$$I = \int \frac{\dfrac{-4t^2 + 2t + 12}{(1 - 4t)^2}}{\dfrac{t^2 + 3}{1 - 4t} \cdot \dfrac{-2t^2 + t + 6}{1 - 4t}} \, dt$$

$$= \int \frac{2}{t^2 + 3} \, dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ arc tg } \frac{t}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ arc tg } \left(\frac{\sqrt{4x^2 + x - 3} - 2x}{\sqrt{3}} \right) + C .$$

(*ii*) Calcular $I = \dfrac{dx}{(x + 4)\sqrt{x^2 + 4x + 9}}$.

O trinômio $x^2 + 4x + 9$ tem $a = 1 > 0$ e $c = 9 > 0$. Portanto, podemos escolher entre os casos (*a*) e (*b*).

Vamos usar (2) com o sinal positivo. Temos,

$$\sqrt{x^2 + 4x + 9} = xt + 3$$

$$x^2 + 4x + 9 = (xt + 3)^2$$

$$x = \frac{6t - 4}{1 - t^2};$$

$$dx = \frac{6t^2 - 8t + 6}{(1 - t^2)^2}$$

e

$$\sqrt{x^2 + 4x + 9} = \frac{6t - 4}{1 - t^2}\, t + 3$$

$$= \frac{3t^2 - 4t + 3}{1 - t^2}.$$

Substituindo esses resultados na integral, vem

$$I = \int \frac{\dfrac{6t^2 - 8t + 6}{(1 - t^2)^2}}{\left(\dfrac{6t - 4}{1 - t^2} + 4\right) \cdot \dfrac{3t^2 - 4t + 3}{1 - t^2}}\, dt$$

$$= \int \frac{dt}{-2t^2 + 3t}$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - 3/2\, t}.$$

Esta integral pode ser resolvida por frações parciais (ver Seção 7.5).

Como as raízes de $q(x) = t^2 - \dfrac{3}{2}\, t$ são $t = 0$ e $t = 3/2$, vem

$$\frac{1}{t^2 - \dfrac{3}{2}\, t} = \frac{A_1}{t} + \frac{A_2}{t - \dfrac{3}{2}}.$$

Eliminando os denominadores, obtemos

$1 = A_1\,(t - 3/2) + A_2\, t$.

Substituindo t pelos valores $t = 0$ e $t = 3/2$, vem

$$t=0 \quad \rightarrow \quad 1 = -\frac{3}{2} A_1$$

$$A_1 = -\frac{2}{3};$$

$$t = \frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad 1 = \frac{3}{2} A_2$$

$$A_2 = \frac{2}{3}.$$

Logo,

$$I = -\frac{1}{2}\left[\int \frac{-2/3}{t}\, dt + \int \frac{2/3}{t - 3/2}\, dt\right]$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{3} \ln |t| - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \ln |t - 3/2| + C_1$$

$$= \frac{1}{3} \ln |t| - \frac{1}{3} \ln |2t - 3| + C.$$

Voltando à variável x, temos

$$I = \frac{1}{3} \ln \left|\frac{\sqrt{x^2 + 4x + 9} - 3}{x}\right| - \frac{1}{3} \ln \left|\frac{2\sqrt{x^2+4x+9} - 3x - 6}{x}\right| + C.$$

(*iii*) Calcular $I = \int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2 + x - 6}}$.

Neste exemplo, $a = 1 > 0$ e o trinômio $x^2 + x - 6$ apresenta raízes reais $r_1 = 2$ e $r_2 = -3$. Podemos, então escolher entre (*1*) e (*3*). Escolhemos (*3*) com $r = 2$. Temos,

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 + x - 6} &= (x-2)\,t \\
x^2 + x - 6 &= (x-2)^2\, t^2 \\
(x-2)(x+3) &= (x-2)^2\, t^2 \\
x + 3 &= (x-2)\, t^2 \\
x &= \frac{2t^2 + 3}{t^2 - 1}\,; \\
dx &= \frac{-10t}{(t^2 - 1)^2}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 + x - 6} &= \left(\frac{2t^2 + 3}{t^2 - 1} - 2 \right) \cdot t \\
&= \frac{5t}{t^2 - 1}\,.
\end{aligned}$$

Substituindo em I, obtemos

$$I = \int \frac{\dfrac{-10t}{(t^2 - 1)^2}}{\dfrac{2t^2 + 3}{t^2 - 1} \cdot \dfrac{5t}{t^2 - 1}}\, dt$$

$$= \int \frac{-10t}{10t^3 + 15t}\, dt$$

$$= \int \frac{-dt}{t^2 + \frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} \text{ arc tg } \frac{t}{\sqrt{\frac{3}{2}}} + C$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ arc tg } \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + x - 6}}{x - 2} \right) + C.$$

7.9 EXERCÍCIOS

Nos exercícios de 1 a 14, calcular a integral indefinida.

1. $\int \frac{(1 + \text{sen } x)}{\text{sen } x\,(1 + \cos x)}\, dx$

2. $\int \frac{dx}{1 + \text{sen } x + \cos x}$

3. $\int \frac{2\, dx}{\text{sen } x + \text{tg } x}$

4. $\int \frac{dx}{4 + 5 \cdot \cos x}$

5. $\int \frac{dx}{3 + \cos x}$

6. $\int \frac{dx}{1 - \cos x}$

7. $\int \frac{1 + \cos x}{1 - \text{sen } x}\, dx$

8. $\int \frac{dx}{3 + \text{sen } 2x}$

9. $\int \frac{\cos (2t - 1)}{2 - \cos (2t - 1)}\, dt$

10. $\int \frac{dt}{3 + \text{sen } t + \cos t}$

11. $\int \frac{e^x\, dx}{4 \text{ sen } e^x - 3 \cos e^x}$

12. $\int \frac{\cos \theta\, d\theta}{1 + \cos \theta}$

13. $\int \frac{dx}{\text{sen}\, x + \cos x}$

14. $\int \frac{d\theta}{4 - \text{sen}\,\theta + \cos\theta}$

15. Calcular a área sob a curva $y = \frac{1}{2 + \text{sen}\, x}$, de $x = 0$ a $x = \frac{\pi}{2}$.

16. Calcular a área limitada pelas curvas $y = \frac{1}{2 + \cos x}$ e $y = \frac{1}{2 - \cos x}$, entre $\frac{-\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.

Nos exercícios de 17 a 33, calcular a integral indefinida.

17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x - x^2 - 6}}$

18. $\int \frac{dx}{(x + 4)\sqrt{x^2 + 4x + 9}}$

19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 + x - 3}}$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x + x^2}}$

21. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2 + x - x^2}}$

22. $\int \frac{x + 1}{(2x + x^2)\sqrt{2x + x^2}}\, dx$

23. $\int \frac{dx}{(x - 1)\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$

24. $\int \frac{1 - \sqrt{1 + x + x^2}}{2x^2\sqrt{1 + x + x^2}}\, dx$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x + 2}}$

26. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$

27. $\int \frac{dx}{(2x + 1)\sqrt{4x^2 + 4x}}$

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 + 12x + 5}}$

29. $\int \frac{dx}{(2x - 1)\sqrt{x^2 - x + 5/4}}$

30. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x - 3}}$

31. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 4x - 4}}$

32. $\int \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 2x}}\, dx$

33. $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$

MAKRON Books

CAPÍTULO 8

EDITORA DA UFSC

APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA

No Capítulo 6, estudamos a integral definida e analisamos uma importante aplicação que é o cálculo de área de regiões planas.

Neste capítulo, outras aplicações da integral definida serão discutidas.

8.1 COMPRIMENTO DE ARCO DE UMA CURVA PLANA USANDO A SUA EQUAÇÃO CARTESIANA

A representação gráfica de uma função contínua $y = f(x)$ num intervalo $[a, b]$, pode ser um segmento de reta ou uma curva qualquer. A porção da curva do ponto $A(a, f(a))$ ao ponto $B(b, f(b))$ é chamada *arco* (ver Figura 8.1).

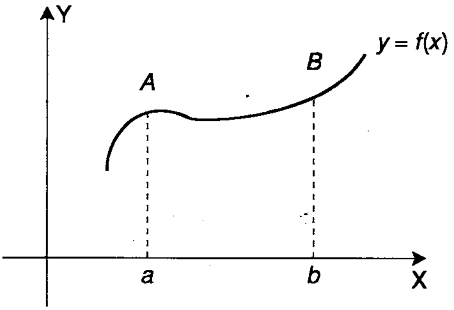


Figura 8-1

Queremos encontrar um número s, que intuitivamente, entendemos ser o comprimento de tal arco.

8.1.1 O gráfico de $y = f(x)$ num intervalo $[a, b]$ é um segmento de reta.

Neste caso, observando a Figura 8.2, vemos que

$$s = \sqrt{(b - a)^2 + (f(b) - f(a))^2}\,.$$

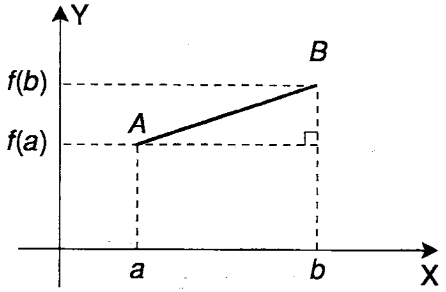


Figura 8-2

8.1.2 O gráfico de $y = f(x)$ num intervalo $[a, b\,]$ é uma curva qualquer.

Sabemos da Geometria, que o perímetro de uma circunferência é definido como o limite dos perímetros dos polígonos regulares nela inscritos. Para outras curvas, podemos proceder de forma análoga.

Seja C uma curva de equação $y = f(x)$, onde f é contínua e derivável em $[a, b]$. Queremos determinar o comprimento do arco da curva C, de A até B (ver Figura 8.3).

Seja P uma partição de $[a, b]$ dada por

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b.$$

Sejam $Q_0, Q_1, ..., Q_n$ os correspondentes pontos sobre a curva C. Unindo os pontos $Q_0, Q_1, ..., Q_n$, obtemos uma poligonal, cujo comprimento nos dá uma aproxi-

mação do comprimento do arco da curva C, de A até B. A Figura 8.4 ilustra esta poligonal para $n = 7$.

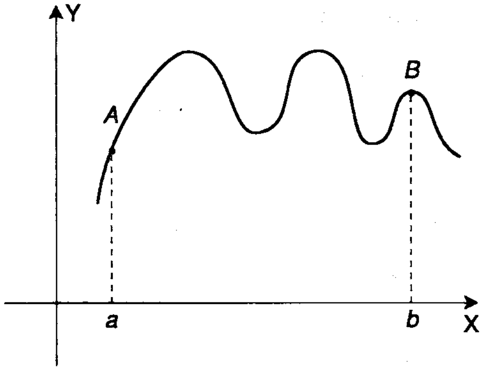


Figura 8-3

O comprimento da poligonal, denotado por l_n, é dado por:

$$l_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}\,. \qquad (1)$$

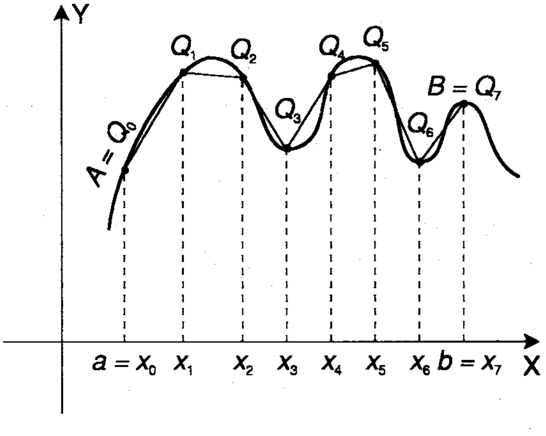


Figura 8-4

Como f é derivável em $[a, b]$, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio (ver 5.5.2) em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$, e escrever

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)\,(x_i - x_{i-1}),$$

onde c_i é um ponto do intervalo (x_{i-1}, x_i).

Substituindo este resultado em (*1*), obtemos

$$\begin{aligned} l_n &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f'(c_i)]^2 (x_i - x_{i-1})^2} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i, \qquad (2) \end{aligned}$$

onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

A soma que aparece em (*2*) é uma soma de Riemann da função

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,.$$

Podemos observar que a medida que n cresce muito e cada Δx_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, torna-se muito pequeno, l_n aproxima-se do que intuitivamente entendemos como o comprimento do arco da curva C, de A até B.

8.1.3 Definição. Seja C uma curva de equação $y = f(x)$, onde f é uma função contínua e derivável em $[a, b]$. O comprimento do arco da curva C, do ponto $A(a, f(a))$ ao ponto $B(b, f(b))$, que denotamos por s, é dado por

$$s = \lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i \qquad (3)$$

se o limite à direita existir.

Pode-se provar que, se $f'(x)$ é contínua em $[a, b]$, o limite em (*3*) existe. Então pela definição da integral definida (ver 6.8.1), temos

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx . \qquad (4)$$

8.1.4 Exemplos

(*i*) Calcular o comprimento do arco da curva dada por $y = x^{3/2} - 4$, de $A(1, -3)$ até $B(4, 4)$.

Solução. A Figura 8.5 ilustra este exemplo.

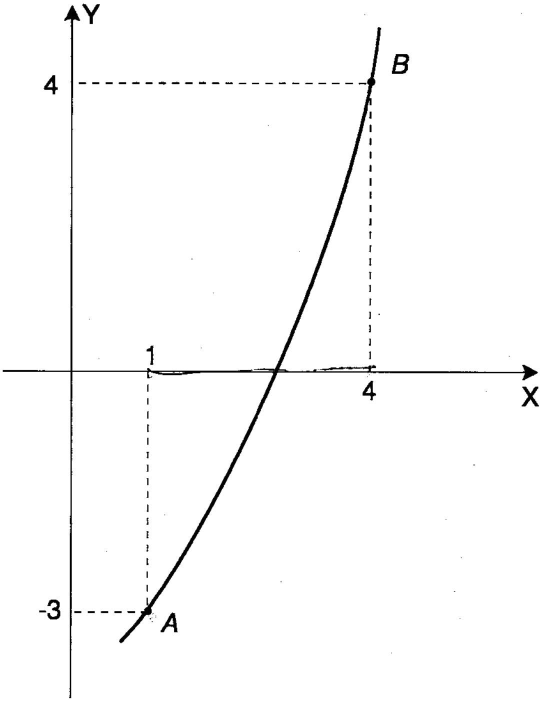


Figura 8-5

Temos, $y = x^{3/2} - 4$ e $y' = \frac{3}{2}x^{1/2}$. Aplicando (*4*), vem

$$s = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}\,dx$$

$$= \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\;dx$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \left.\frac{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}}{3/2}\right|_1^4$$

$$= \frac{8}{27}\,10^{3/2} - \frac{8}{27}\left(\frac{13}{4}\right)^{3/2}$$

$$= \frac{80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}}{27} \text{ unidades de comprimento.}$$

Observamos que poucos exemplos apresentam no integrando uma função, tal que a integral possa ser resolvida por um dos métodos apresentados nos capítulos anteriores. Os métodos que dão uma solução aproximada estão além dos objetivos deste livro.

(*ii*) Obter uma integral definida que nos dá o comprimento da curva $y = \cos 2x$, para $0 \le x \le \pi$.

Temos, $y = \cos 2x$ e $y' = -2 \operatorname{sen} 2x$. Portanto,

$$s = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + 4 \operatorname{sen}^2 2x}\; dx.$$

Podem ocorrer situações em que a curva C é dada por $x = g(y)$ em vez de $y = f(x)$. Neste caso, o comprimento do arco da curva C de $A(g(c), c)$ até $B(g(d), d)$ (ver Figura 8.6), é dado por

$$s = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy. \tag{5}$$

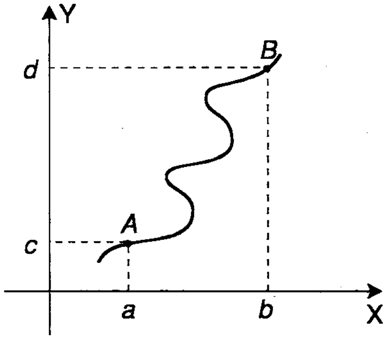


Figura 8-6

(*iii*) Calcular o comprimento do arco dado por $x = \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{6y} - 1$, $1 \leq y \leq 3$.

Neste exemplo, vamos usar (5). Temos,

$$g(y) = \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{6y} - 1 \quad \text{e} \quad g'(y) = \frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{6y^2}.$$

Portanto,

$$s = \int_1^3 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{6y^2}\right)^2}\, dy$$

$$= \int_1^3 \sqrt{\frac{(9y^4 + 1)^2}{36y^4}}\, dy$$

$$= \int_1^3 \frac{9y^4 + 1}{6y^2}\, dy$$

$$= \int_1^3 \left(\frac{3}{2}\, y^2 + \frac{1}{6}\, y^{-2}\right) dy$$

$$= \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{y^3}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{y^{-1}}{-1}\right) \Bigg|_1^3$$

$$= \frac{118}{9}.$$

8.2 COMPRIMENTO DE ARCO DE UMA CURVA PLANA DADA POR SUAS EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS

Vamos agora, calcular o comprimento de arco de uma curva C, dada na forma paramétrica pelas equações

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [t_0\,,\; t_1],$$

onde $x = x(t)$ e $y = y(t)$ são contínuas com derivadas contínuas e $x\,'(t) \neq 0$ para todo $t \in [t_0, t_1]$.

Neste caso, conforme vimos em 4.18, estas equações definem uma função $y = f(x)$, cuja derivada é dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\,'(t)}{x\,'(t)}.$$

Para calcular o comprimento de arco de C, vamos fazer uma mudança de variáveis em (*4*). Substituindo $x = x(t)$; $dx = x'(t)\,dt$, obtemos

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right]^2}\; x'(t)\, dt,$$

onde $x(t_0) = a$ e $x(t_1) = b$.

Portanto,

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt.$$

8.2.1 Exemplo. Calcular o comprimento da hipociclóide $\begin{cases} x = 2\,\text{sen}^3\, t \\ y = 2\cos^3 t. \end{cases}$

Solução. A Figura 8.7 ilustra esta curva.

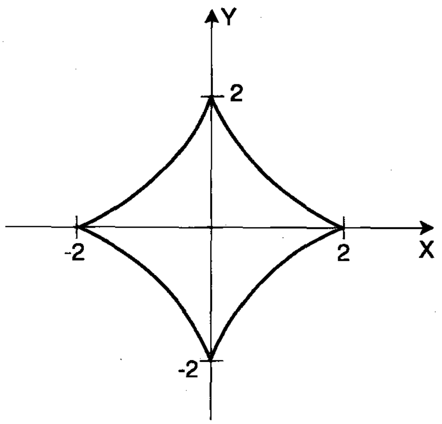


Figura 8-7

Observamos que esta curva é simétrica em relação aos eixos. Vamos então, calcular o comprimento do arco que está descrito no primeiro quadrante, isto é,

$$\begin{cases} x = 2 \operatorname{sen}^3 t \\ y = 2 \cos^3 t \end{cases}, \quad t \in [0, \pi/2].$$

Temos,

$x(t) = 2 \operatorname{sen}^3 t$, $\qquad x'(t) = 6 \operatorname{sen}^2 t \cos t$;

$y(t) = 2 \cos^3 t$, $\qquad y'(t) = -6 \cos^2 t \operatorname{sen} t$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
s &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(6 \operatorname{sen}^2 t \cos t)^2 + (-6 \cos^2 t \operatorname{sen} t)^2}\, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \sqrt{36 \operatorname{sen}^4 t \cos^2 t + 36 \cos^4 t \operatorname{sen}^2 t}\, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \sqrt{36 \operatorname{sen}^2 t \cos^2 t}\, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} 6 \operatorname{sen} t \cos t\, dt \\
&= 6 \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 t}{2} \Bigg|_0^{\pi/2} \\
&= 3 \text{ unidades de comprimento.}
\end{aligned}$$

Logo, o comprimento total da hipociclóide dada é $4 \cdot 3 = 12$ unidades de comprimento.

8.3 ÁREA DE UMA REGIÃO PLANA

Um estudo de área de regiões planas foi feito no Capítulo 6. Nesta seção, vamos calcular a área de uma região plana, sendo que as curvas que delimitam a região são dadas na forma paramétrica.

Caso I. Cálculo da área da figura plana S, limitada pelo gráfico de f, pelas retas $x = a$, $x = b$ e o eixo dos x (ver Figura 8.8), onde $y = f(x)$ é contínua, $f(x) \geq 0 \ \forall \ x \in [a, b]$ e é dada por

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [t_0, t_1],$$

com $x(t_0) = a$ e $x(t_1) = b$.

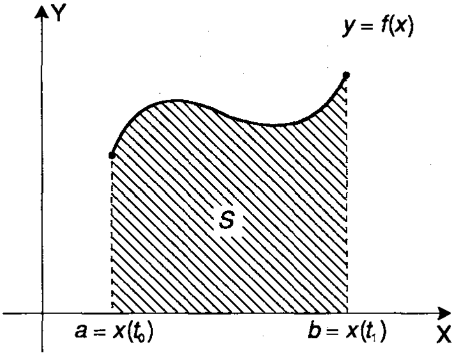


Figura 8-8

Neste caso, conforme vimos em 6.11.1, a área de S é dada por

$$A = \int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b y\ dx.$$

Fazendo a substituição $x = x(t)$; $dx = x'(t)\,dt$, obtemos

$$A = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \cdot x'(t)\,dt. \tag{1}$$

8.3.1 Exemplo. Calcular a área da região limitada pela elipse $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\,\mathrm{sen}\,t. \end{cases}$

A Figura 8.9 ilustra este exemplo.

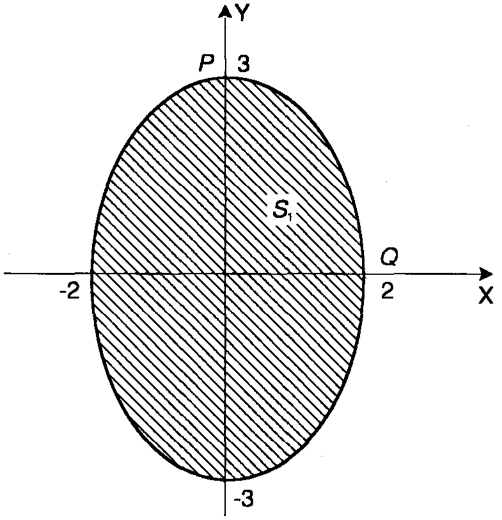


Figura 8-9

Como esta curva apresenta simetria em relação aos eixos, vamos calcular a área da região S_1 que está no primeiro quadrante.

Para aplicar (*1*) precisamos determinar os limites de integração t_0 e t_1. Para isso, usamos as equações paramétricas da curva. Observando a Figura 8.9, vemos que x varia de 0 a 2 e assim, t_0 corresponde ao ponto $P(0, 3)$ e t_1 corresponde ao ponto $Q(2, 0)$ sobre a elipse.

No ponto $P(0, 3)$, temos

$0 = 2 \cos t_0$,

$3 = 3 \text{ sen } t_0$;

dessa forma, $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

No ponto $Q(2, 0)$, temos

$2 = 2 \cos t_1$,

$0 = 3 \text{ sen } t_1$;

então, $t_1 = 0$.

Portanto,

$$A_1 = \int_{\pi/2}^{0} 3 \text{ sen } t \cdot (-\ 2 \text{ sen } t)\ dt$$

$$= -\int_{0}^{\pi/2} -6 \text{ sen}^2\ t\ dt$$

$$= 6 \int_{0}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t\right) dt$$

$$= 3 \left(t - \frac{1}{2} \text{ sen } 2t\right) \Bigg|_{0}^{\pi/2}$$

$$= \frac{3\pi}{2} \text{ u.a.}\ .$$

Logo, a área da região limitada pela elipse é $4 \cdot \dfrac{3\pi}{2} = 6\pi$ u.a. .

Caso II. Cálculo da área da figura plana limitada pelos gráficos de f e g, pelas retas $x = a$ e $x = b$, onde f e g são funções contínuas em $[a, b]$, com $f(x) \geq g(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$ e são dadas na forma paramétrica.

A Figura 8.10 ilustra este caso.

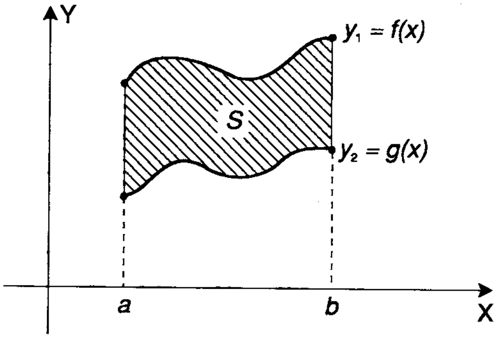


Figura 8-10

• Temos que $y_1 = f(x)$ é dada por

$$\begin{cases} x_1 = x_1\ (t) \\ y_1 = y_1\ (t) \end{cases}, \quad t \in [t_0\,,\ t_1]$$

e $y_2 = g(x)$ é dada por

$$\begin{cases} x_2 = x_2\ (t) \\ y_2 = y_2\ (t) \end{cases}, \quad t \in [t_2\,,\ t_3]\,,$$

onde $x_1(t_0) = x_2(t_2) = a$ e $x_1(t_1) = x_2(t_3) = b$.

Usando o resultado de 6.11.5 e o caso anterior, vem

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx$$

$$= \int_a^b f(x)\ dx - \int_a^b g(x)\ dx$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} y_1(t)\ x_1'(t)\ dt - \int_{t_2}^{t_3} y_2(t)\ x_2'(t)\ dt. \qquad (2)$$

8.3.2 **Exemplo.** Calcular a área entre as elipses

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 4\,\text{sen}\, t \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{array}{l} x = 2\cos t \\ y = \text{sen}\, t\ . \end{array}$$

A Figura 8.11 ilustra este exemplo.

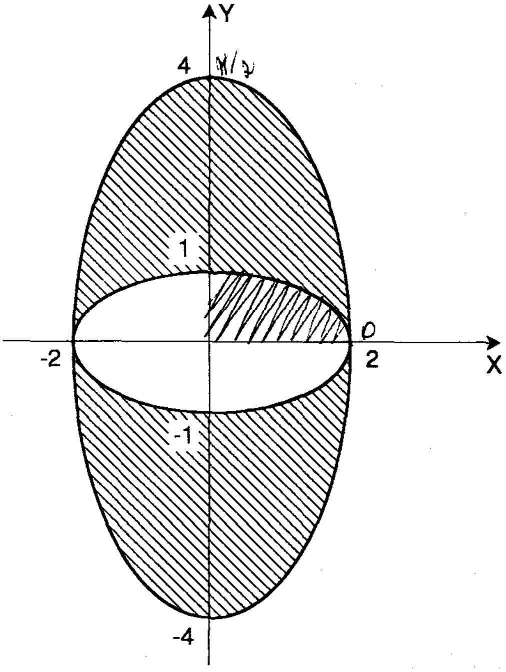


Figura 8-11

Procedendo de forma análoga ao exemplo 8.3.1 e aplicando (2), obtemos

$$\begin{aligned}
A &= 4 \int_{\pi/2}^{0} [4 \text{ sen } t \cdot (-2 \text{ sen } t) - \text{sen } t \cdot (-2 \text{ sen } t)]\, dt \\
&= 4 \int_{\pi/2}^{0} (-8 \text{ sen}^2 t + 2 \text{ sen}^2 t)\, dt \\
&= -4 \int_{0}^{\pi/2} -6 \text{ sen}^2 t\, dt \\
&= 24 \int_{0}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t\right) dt \\
&= 12 \left(t - \frac{1}{2} \text{ sen } 2t\right) \Big|_{0}^{\pi/2} \\
&= 12 \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= 6\pi \text{ u. a.}.
\end{aligned}$$

8.4 EXERCÍCIOS

Nos exercícios de 1 a 14, encontrar o comprimento de arco da curva dada.

1. $y = 5x - 2 \quad , \quad -2 \leq x \leq 2$

2. $y = x^{2/3} - 1 \quad , \quad 1 \leq x \leq 2$

3. $y = \frac{1}{3}(2 + x^2)^{3/2} \quad , \quad 0 \leq x \leq 3$

4. $x^{2/3} + y^{2/3} = 2^{2/3}$

5. $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8x^2} \; , \; 1 \leq x \leq 2$

6. $x = \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4y} \; , \; 1 \leq y \leq 3$

7. $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, de (0,1) a $\left(1, \frac{e + e^{-1}}{2}\right)$

8. $y = \ln x$, $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$

9. $y = 1 - \ln(\text{sen}\, x)$, $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

10. $y = \sqrt{x^3}$, de $P_0(0, 0)$ até $P_1(4, 8)$

11. $y = 4\sqrt{x^3} + 2$, de $P_0(0, 2)$ até $P_1(1, 6)$

12. $y = 6(\sqrt[3]{x^2} - 1)$, de $P_0(1, 0)$ até $P_1(2\sqrt{2}, 6)$

13. $(y - 1)^2 = (x + 4)^3$, de $P_0(-3, 2)$ até $P_1(0, 9)$

14. $x^2 = y^3$, de $P_0(0, 0)$ até $P_1(8, 4)$

Nos exercícios de 15 a 21, estabelecer a integral que dá o comprimento de arco da curva dada.

15. $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$

16. $y = \frac{1}{x}$, de $P_0(\frac{1}{4}, 4)$ até $P_1(4, \frac{1}{4})$

17. $x^2 - y^2 = 1$, de $P_0(3, -2\sqrt{2})$ até $P_1(3, 2\sqrt{2})$

18. $y = e^x$, de $P_0(0, 1)$ até $P_1(2, e^2)$

19. $y = x^2 + 2x - 1$, $0 \leq x \leq 1$

20. $y = \sqrt{x}$, $2 \leq x \leq 4$

21. $y = \text{sen}\, 3x$, $0 \leq x \leq 2\pi$

Nos exercícios de 22 a 29, calcular o comprimento de arco da curva dada na forma paramétrica.

22. $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}, \quad 1 \leq t \leq 3$

23. $\begin{cases} x = 2\,(t - \text{sen } t) \\ y = 2\,(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in [0, \pi]$

24. $\begin{cases} x = -\text{sen } t \\ y = \cos t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$

25. $\begin{cases} x = t \text{ sen } t \\ y = t \cos t \end{cases}, \quad t \in [0, \pi]$

26. $\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = t - 1 \end{cases}, \quad t \in [0, 2]$

27. $\begin{cases} x = 1/3\ t^3 \\ y = 1/2\ t^2 \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2$

28. $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \text{ sen } t \end{cases}, \quad 1 \leq t \leq 2$

29. $\begin{cases} x = 2 \cos t + 2t \text{ sen } t \\ y = 2 \text{ sen } t - 2t \cos t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$

30. Achar o comprimento da hipociclóide $\begin{cases} x = 4 \text{ sen}^3 t \\ y = 4 \cos^3 t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$

31. Achar o comprimento da circunferência $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \text{ sen } t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$

32. Calcular o comprimento da parte da circunferência que está no primeiro quadrante $\begin{cases} x = 7 \cos t/4 \\ y = 7 \text{ sen } t/4 \end{cases}$

Nos exercícios de 33 a 35, calcular a área da região limitada pelas seguintes curvas, dadas na forma paramétrica.

33. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \text{sen } t \end{cases}$ e $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 1/2 \text{ sen } t \end{cases}$

34. $\begin{cases} x = 2 \cos^3 t \\ y = 2 \text{ sen}^3 t \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \text{ sen } t \end{cases}$

35. $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$

36. Calcular a área da parte da circunferência $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\,\text{sen}\, t \end{cases}$ que está acima da reta $y = 1$.

37. Calcular a área da região delimitada pela elipse $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = \text{sen}\, t \end{cases}$.

38. Calcular a área da região limitada à direita pela elipse $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\,\text{sen}\, t \end{cases}$ e à esquerda pela reta $x = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

39. Calcular a área da região entre as curvas $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 2\,\text{sen}\, t \end{cases}$ e $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \text{sen}\, t \end{cases}$.

40. Calcular a área entre o arco da hipociclóide $\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 3\,\text{sen}^3\, t \end{cases}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e a reta $x + y = 3$.

41. Calcular a área delimitada pela hipociclóide $\begin{cases} x = 4\,\text{sen}^3\, t \\ y = 4\cos^3 t \end{cases}$.

42. Calcular a área da região S, hachurada na Figura 8.12.

$\begin{cases} x = k(t - \text{sen}\, t) \\ y = k(1 - \cos t) \end{cases}$

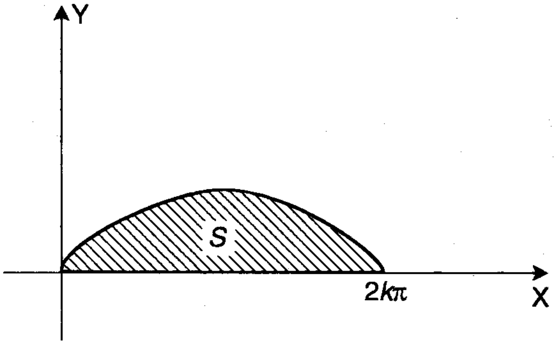


Figura 8-12

8.5 VOLUME DE UM SÓLIDO DE REVOLUÇÃO

Fazendo uma região plana girar em torno de uma reta no plano, obtemos um sólido, que é chamado *sólido de revolução*. A reta ao redor da qual a região gira é chamada *eixo de revolução*.

Por exemplo, fazendo a região limitada pelas retas $y = 0$, $y = x$ e $x = 4$ girar em torno do eixo dos x, o sólido de revolução obtido é um cone (ver Figura 8.13).

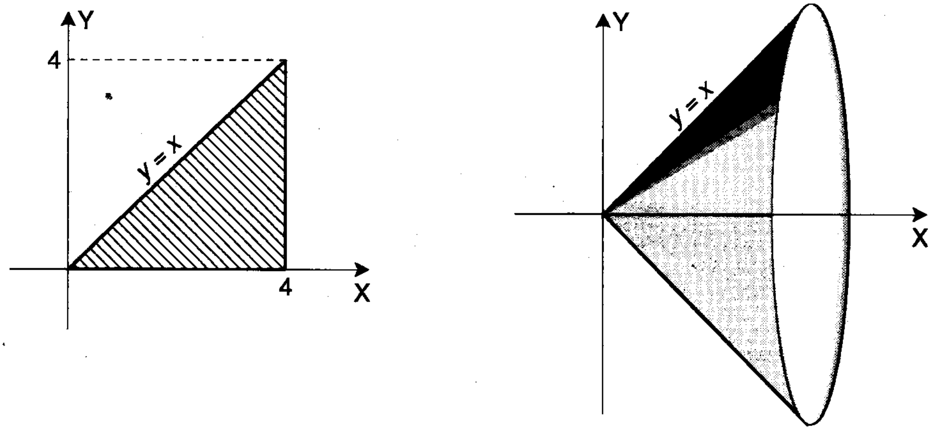


Figura 8-13

Se o retângulo delimitado pelas retas $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 3$ girar em torno do eixo dos y, obtemos um cilindro (ver Figura 8.14).

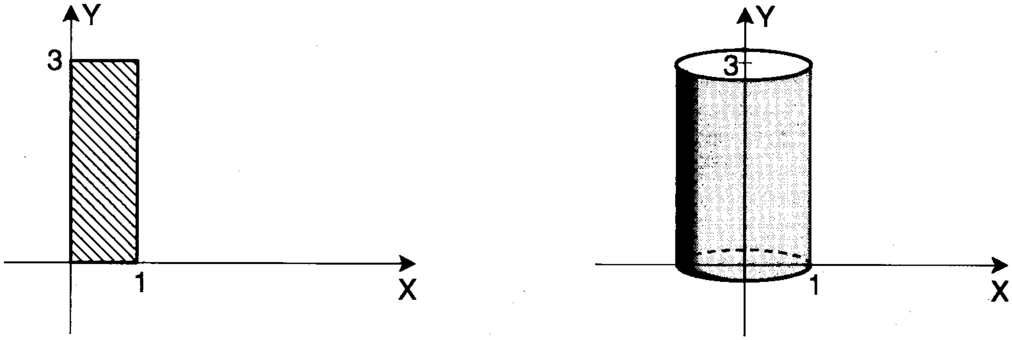


Figura 8-14

Consideremos agora, o problema de definir o volume do sólido T, gerado pela rotação em torno do eixo dos x, da região plana R vista na Figura 8.15.

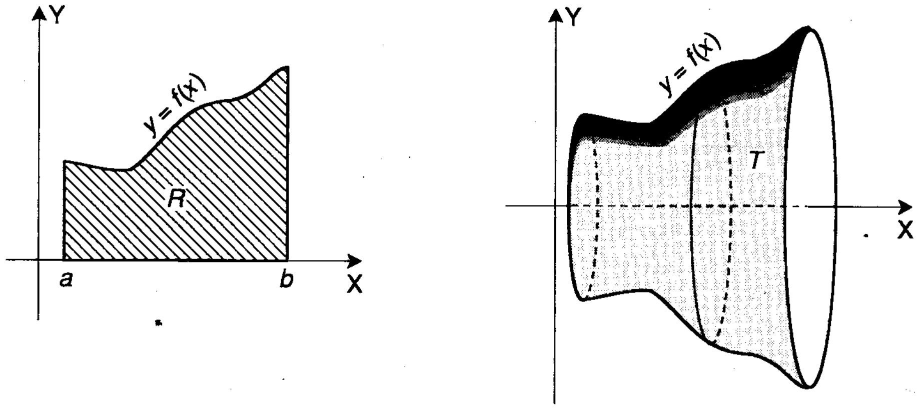


Figura 8-15

Suponhamos que $f(x)$ é contínua e não negativa em $[a, b]$.

Consideremos uma partição P de $[a, b]$, dada por

$a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b.$

Seja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ o comprimento do intervalo $[\, x_{i-1}\, , x_i\,]$.

Em cada intervalo $[\, x_{i-1}\, , x_i\,]$, escolhemos um ponto qualquer c_i.

Para cada i, $i = 1, ..., n$, construimos um retângulo R_i, de base $\Delta\, x_i$ e altura $f(c_i)$. Fazendo cada retângulo R_i girar em torno do eixo dos x, o sólido de revolução obtido é um cilindro (ver Figura 8.16), cujo volume é dado por

$\pi\, [\, f(c_i)\,]^2\, \Delta\, x_i\, .$

A soma dos volumes dos n cilindros, que representamos por V_n, é dada por

$$V_n = \pi\, [f(c_1)\,]^2\, \Delta\, x_1 + \pi\, [f(c_2)\,]^2\, \Delta\, x_2 + ... + \pi\, [f(c_n)\,]^2\, \Delta x_n$$

$$= \pi \sum_{i=1}^{n} [f(c_i)]^2\, \Delta\, x_i\, ,$$

e nos dá uma aproximação do volume do sólido T (ver Figura 8.17).

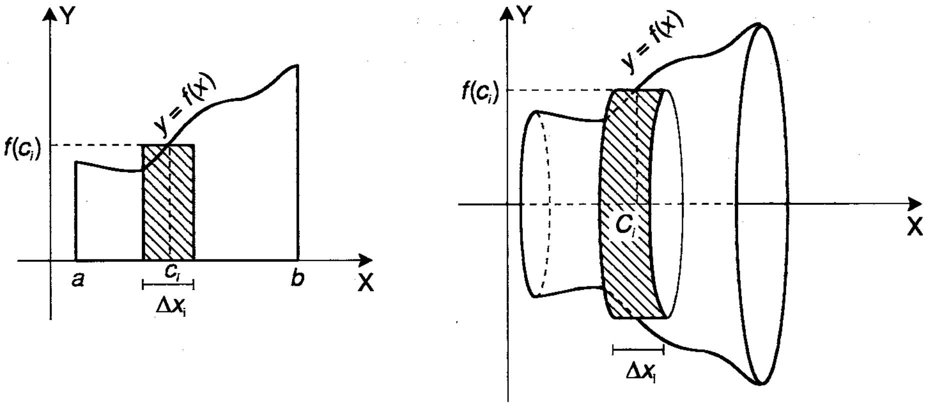


Figura 8-16

Podemos observar que à medida que n cresce muito e cada Δx_i, $i = 1, ..., n$, torna-se muito pequeno, a soma dos volumes dos n cilindros aproxima-se do que intuitivamente entendemos como o volume do sólido T.

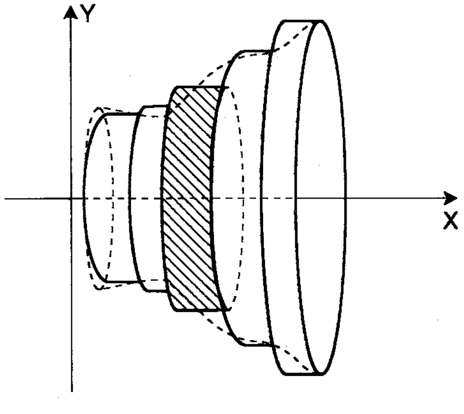


Figura 8-17

8.5.1 Definição. Seja $y = f(x)$ uma função contínua não negativa em $[a, b]$. Seja R a região sob o gráfico de f de a até b. O volume do sólido T, gerado pela revolução de R em torno do eixo dos x, é definido por

$$V = \lim_{\text{máx } \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} [f(c_i)]^2 \, \Delta x_i \, . \qquad (1)$$

A soma que aparece em (*1*) é uma soma de Riemann da função $[f(x)]^2$. Como f é contínua, o limite em (*1*) existe, e então, pela definição da integral definida, temos

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx. \tag{2}$$

A fórmula (2) pode ser generalizada para outras situações:

(1) A função $f(x)$ é negativa em alguns pontos de $[a, b]$.

A Figura 8.18(c) mostra o sólido gerado pela rotação da Figura 8.18(a), ao redor do eixo dos x, que coincide com o sólido gerado pela rotação, ao redor do eixo dos x, da região sob o gráfico da função $|f(x)|$ de a até b (ver Figura 8.18(b)). Como $|f(x)|^2 = (f(x))^2$, a fórmula (2) permanece válida neste caso.

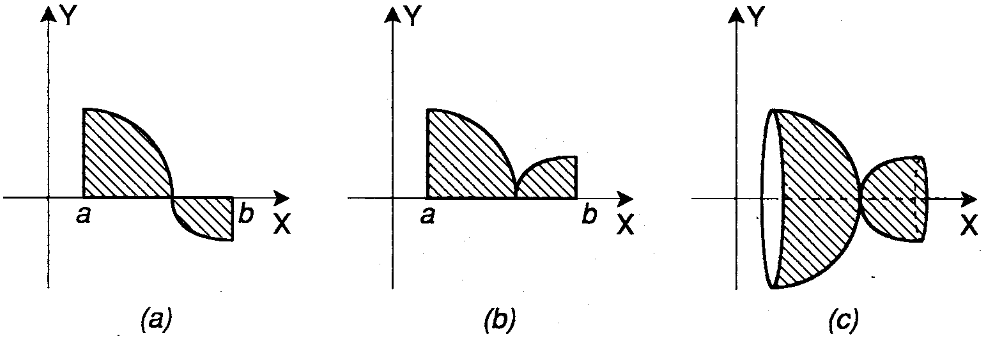


Figura 8-18

(2) A região R está entre os gráficos de duas funções $f(x)$ e $g(x)$ de a até b, como mostra a Figura 8.19.

Supondo $f(x) \geq g(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$, o volume do sólido T, gerado pela rotação de R em torno do eixo dos x, é dado por

$$V = \pi \int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right) dx. \tag{3}$$

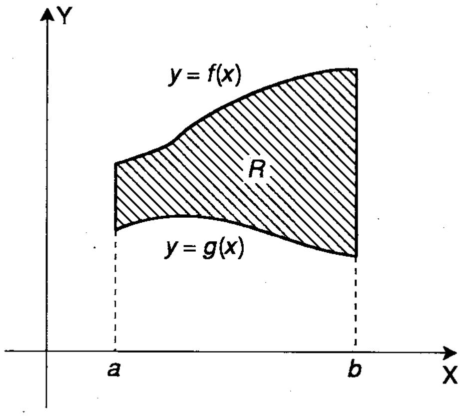


Figura 8-19

(3) Ao invés de girar ao redor do eixo dos x, a região R gira em torno do eixo dos y (ver Figura 8.20).

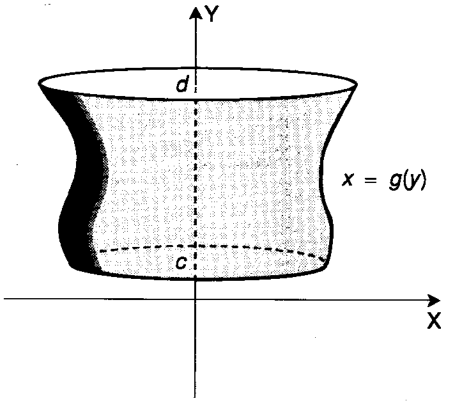


Figura 8-20

Neste caso, temos

$$V = \pi \int_{c}^{d} [g(y)]^2 \, dy . \qquad (4)$$

(4) A rotação se efetua ao redor de uma reta paralela a um dos eixos coordenados.

Se o eixo de revolução for a reta $y = L$ (ver Figura 8.21), temos

$$V = \pi \int_a^b [f(x) - L]^2 \, dx . \tag{5}$$

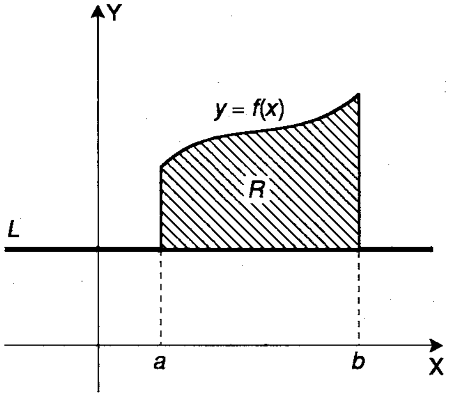


Figura 8-21

Se o eixo de revolução for a reta $x = M$ (ver Figura 8.22), temos

$$V = \pi \int_c^d [g(y) - M]^2 \, dy . \tag{6}$$

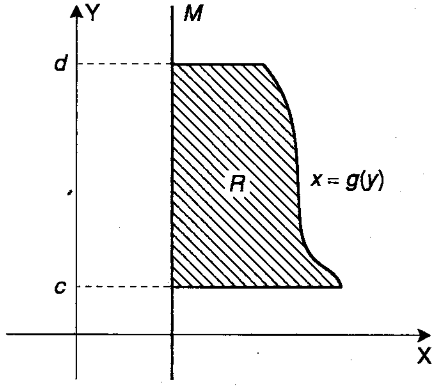


Figura 8-22

8.5.2 Exemplos

(*i*) A região R, limitada pela curva $y = \dfrac{1}{4}x^2$, o eixo dos x e as retas $x = 1$ e $x = 4$, gira em torno do eixo dos x. Encontrar o volume do sólido de revolução gerado.

Na Figura 8.23, vemos a região R e o sólido T gerado pela rotação de R em torno do eixo dos x.

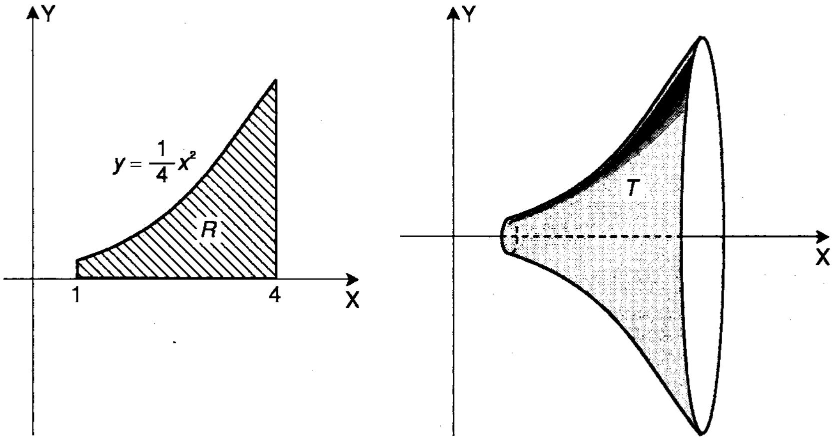


Figura 8-23

Aplicando a fórmula (2), temos

$$V = \pi \int_1^4 \left(\frac{1}{4}x^2\right)^2 dx$$

$$= \frac{\pi}{16} \cdot \frac{x^5}{5} \Bigg|_1^4$$

$$= \frac{\pi}{80}\,[4^5 - 1^5]$$

$$= \frac{1023}{80}\,\pi \text{ unidades de volume (u. v.).}$$

(*ii*) Calcular o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo dos x, da região limitada pela parábola $y = \frac{1}{4}(13 - x^2)$ e pela reta $y = \frac{1}{2}(x + 5)$.

Na Figura 8.24 podemos ver a região R e o sólido T, gerado pela rotação de R em torno do eixo dos x.

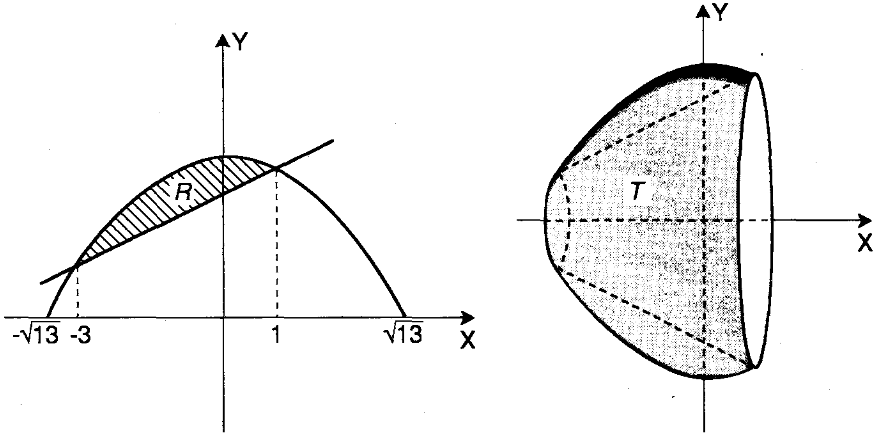


Figura 8-24

Aplicando a fórmula (*3*), vem

$$V = \pi \int_{-3}^{1} \left\{ \left[\frac{1}{4}(13 - x^2) \right]^2 - \left[\frac{1}{2}(x + 5) \right]^2 \right\} dx$$

$$= \pi \int_{-3}^{1} \left[\frac{1}{16}(169 - 26x^2 + x^4) - \frac{1}{4}(x^2 + 10x + 25) \right] dx$$

$$= \frac{\pi}{16} \int_{-3}^{1} (69 - 40x - 30x^2 + x^4)\, dx$$

$$= \frac{\pi}{16} \left[69x - 20x^2 - 10x^3 + \frac{x^5}{5} \right] \Bigg|_{-3}^{1}$$

$$= \frac{\pi}{16}\left[69 - 20 - 10 + \frac{1}{5} + 207 - 180 + 270 + \frac{243}{5}\right]$$

$$= \frac{1924\,\pi}{80}$$

$$= 24{,}05 \text{ u. v.}.$$

(*iii*) Calcular o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo dos x, da região entre o gráfico da função $y = \text{sen}\, x$ e o eixo dos x, de $\frac{-\pi}{2}$ até $\frac{3\pi}{2}$.

A Figura 8.25 mostra a região R e o sólido gerado pela rotação de R em torno do eixo dos x.

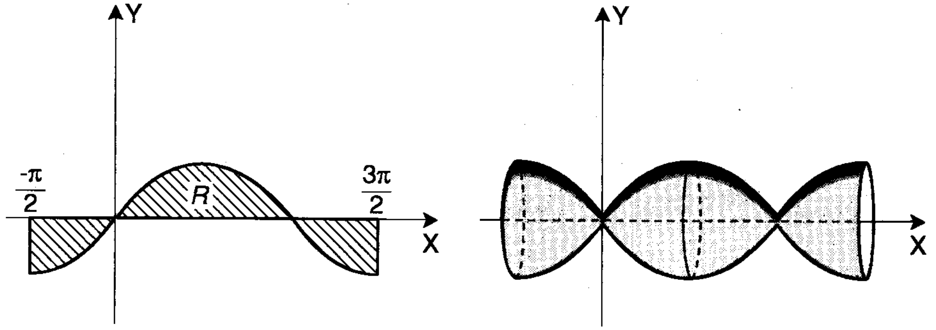


Figura 8-25

Aplicando a fórmula (2), temos

$$V = \pi \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} (\text{sen}\ x)^2\, dx$$

$$= \pi \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x \right) \Bigg|_{-\pi/2}^{3\pi/2}$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} \left(2 \cdot \frac{3\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} \left(2 \cdot \frac{-\pi}{2} \right) \right)$$

$$= \pi \left(\frac{3\pi}{4} - 0 + \frac{\pi}{4} + 0 \right)$$

$$= \pi^2 \text{ u. v.}.$$

(iv) A região limitada pela parábola cúbica $y = x^3$, pelo eixo dos y e pela reta $y = 8$, gira em torno do eixo dos y. Determinar o volume do sólido de revolução obtido.

Podemos ver a região R e o sólido de revolução T, gerado pela rotação de R em torno do eixo dos y, na Figura 8.26.

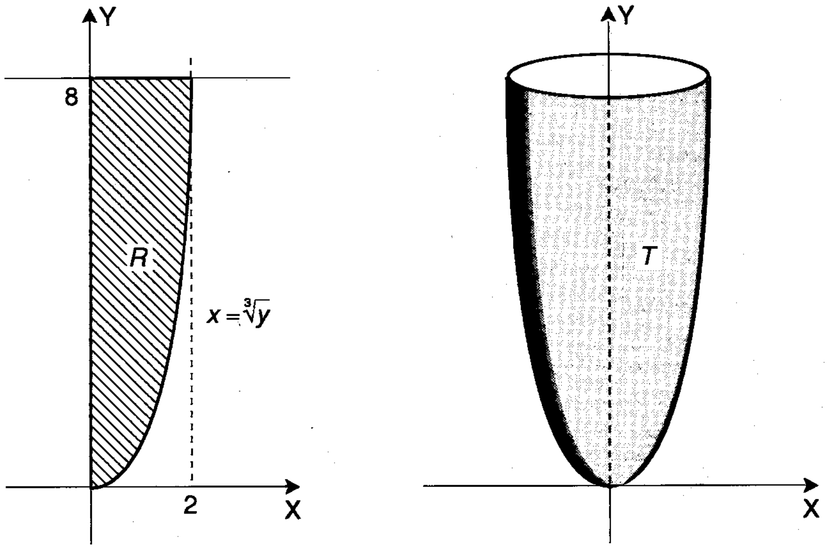


Figura 8-26

Para calcular o volume de T vamos aplicar a fórmula (*4*). Temos,

$$V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 \, dy$$

$$= \pi \int_0^8 [\sqrt[3]{y}\,]^2 \, dy$$

$$= \pi \cdot \frac{3}{5} y^{5/3} \Big|_0^8$$

$$= \frac{3\pi}{5} 8^{5/3}$$

$$= \frac{96\pi}{5} \text{ u. v. .}$$

(v) Determinar o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $y = 4$, da região limitada por $y = 1/x$, $y = 4$ e $x = 4$.

A região R e o sólido gerado pela rotação de R em torno da reta $y = 4$, podem ser vistos na Figura 8.27.

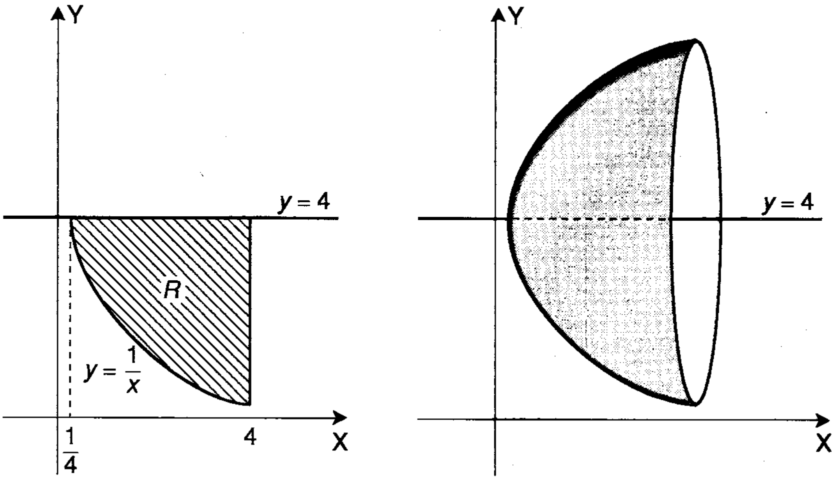


Figura 8-27

Neste exemplo, observamos que o raio da secção transversal do sólido não é $f(x) - L$, mas sim $L - f(x)$, já que $f(x) < L$. Porém, como $(f(x) - L)^2 = (L - f(x))^2$, a fórmula (*5*) continua válida.

Temos,

$$V = \pi \int_a^b [f(x) - L]^2 \, dx$$

$$= \pi \int_{1/4}^4 \left[\frac{1}{x} - 4 \right]^2 dx$$

$$= \pi \int_{1/4}^4 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{8}{x} + 16 \right) dx$$

$$= \pi \left[-\frac{1}{x} - 8 \ln x + 16x \right] \Bigg|_{1/4}^{4}$$

$$= \pi \left(-\frac{1}{4} - 8 \ln 4 + 64 + 4 + 8 \ln \frac{1}{4} - 4 \right)$$

$$= \pi \left(\frac{255}{4} - 8 \ln 16 \right) \text{u.v.}.$$

(*vi*) A região R, delimitada pela parábola $x = \frac{1}{2} y^2 + 1$ e pelas retas $x = -1$, $y = -2$ e $y = 2$ gira em torno da reta $x = -1$. Determinar o volume do sólido de revolução obtido.

Podemos ver a região R e o sólido gerado pela rotação de R, em torno da reta $x = -1$, na Figura 8.28.

Aplicando a fórmula (*6*), temos

$$V = \pi \int_c^d [g(y) - M]^2 \, dy$$

$$= \pi \int_{-2}^{2} \left[\frac{1}{2} y^2 + 1 - (-1) \right]^2 dy$$

$$= \pi \int_{-2}^{2} \left(\frac{1}{2} y^2 + 2 \right)^2 dy$$

$$= \pi \int_{-2}^{2} \left(\frac{1}{4} y^4 + 2y^2 + 4 \right) dy$$

$$= \pi \left(\frac{y^5}{20} + \frac{2y^3}{3} + 4y \right) \Bigg|_{-2}^{2}$$

$$= \pi \left(\frac{32}{20} + \frac{16}{3} + 8 + \frac{32}{20} + \frac{16}{13} + 8 \right)$$

$$= \frac{448\,\pi}{15} \text{ u. v.} \, .$$

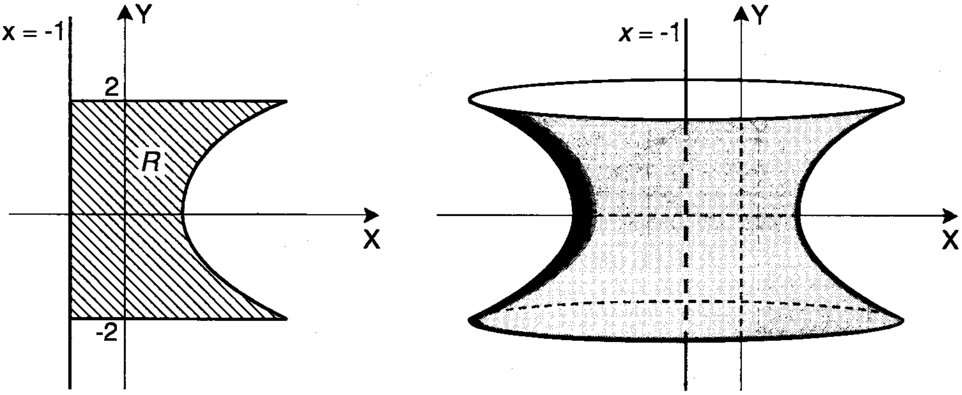


Figura 8-28

8.6 ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO

Quando uma curva plana gira em torno de uma reta no plano, obtemos uma superfície de revolução.

Vamos considerar o problema de determinar a área da superfície de revolução S, obtida quando uma curva C, de equação $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, gira em torno do eixo dos x (ver Figura 8.29).

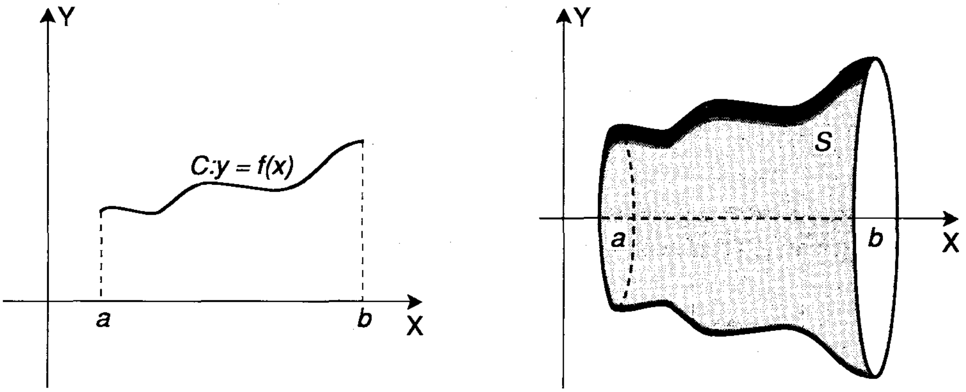


Figura 8-29

Vamos supor que $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$ e que f é uma função derivável em $[a, b]$.

Como fizemos para o cálculo do volume de um sólido de revolução, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos através dos pontos

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b.$$

Sejam $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$ os correspondentes pontos sobre a curva C. Unindo os pontos $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$, obtemos uma linha poligonal que aproxima a curva C.

A Figura 8.30 ilustra esta poligonal para $n = 7$.

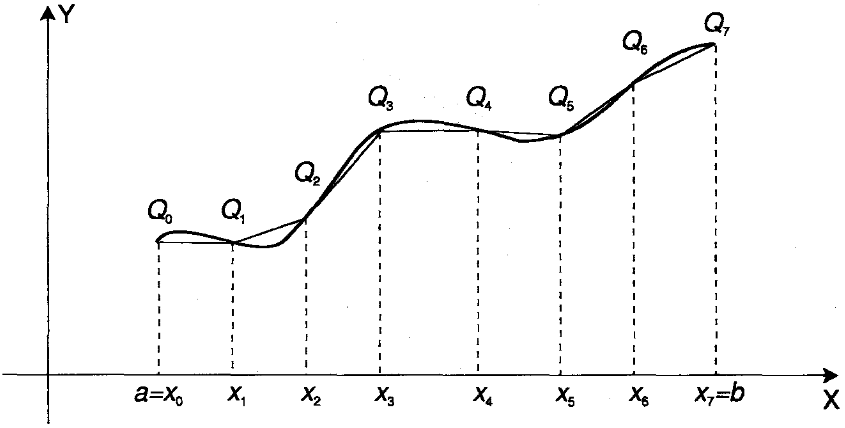


Figura 8-30

Fazendo cada segmento de reta desta linha poligonal girar em torno do eixo dos x, a superfície de revolução obtida é um tronco de cone, como mostra a Figura 8.31.

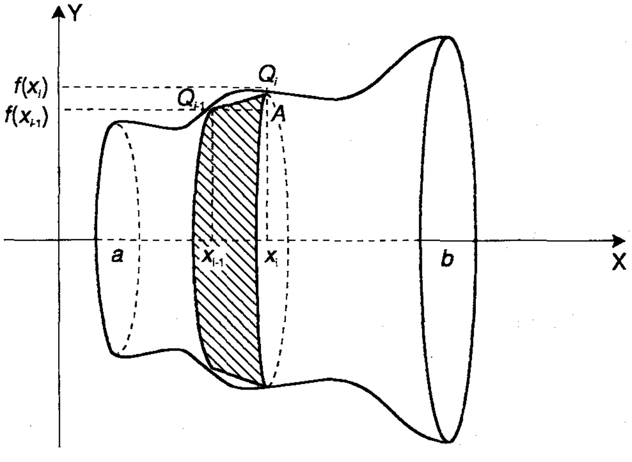


Figura 8-31

Da geometria elementar, sabemos que a área lateral do tronco de cone é dada por

$$A = \pi\,(r_1 + r_2)\,L,$$

onde r_1 é o raio da base menor, r_2 é o raio da base maior e L é o comprimento da geratriz do tronco de cone (ver Figura 8.32).

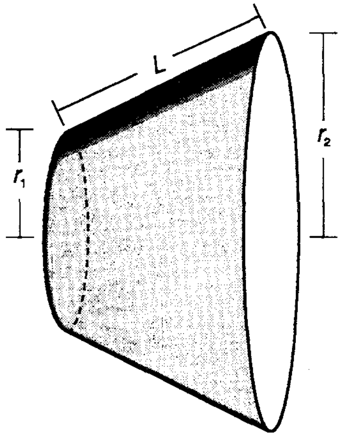


Figura 8-32

Portanto, a área lateral do tronco de cone que visualizamos na Figura 8.31, é dada por

$$\begin{aligned} A_i &= \pi\,[f(x_{i-1}) + f(x_i)]\;\Delta s_i \\ &= 2\pi\left[\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right]\Delta s_i \\ &= 2\pi\, f(c_i)\;\Delta s_i\,, \qquad (1) \end{aligned}$$

onde Δs_i é o comprimento do segmento $\overline{Q_{i-1}\,Q_i}$ e c_i é um ponto no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$f(c_i) = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\,. \qquad (2)$$

Observamos que podemos garantir a existência de $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ que satisfaz (2), pelo Teorema do Valor Intermediário (Teorema 3.16.8), já que f é contínua em $[a, b]$.

Analisando o triângulo retângulo $Q_{i-1}\,A\,Q_i$ da Figura 8.31, vemos que

$$\Delta s_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}\,. \qquad (3)$$

Como f é derivável no intervalo $[a, b]$, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio em cada $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, ..., n$. Então, para cada $i = 1, 2, ..., n$, existe um ponto $d_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que

$$\begin{aligned} f(x_i) - f(x_{i-1}) &= f'(d_i)\,(x_i - x_{i-1}) \\ &= f'(d_i)\,\Delta x_i, \end{aligned}$$

onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Substituindo em (*3*), vem

$$\begin{aligned} \Delta s_i &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + [f'(d_i)]^2\,(\Delta x_i)^2} \\ &= \sqrt{1 + [f'(d_i)]^2}\,\Delta x_i. \end{aligned}$$

Substituindo agora, este resultado em (*1*), obtemos

$$A_i = 2\pi\, f(c_i)\sqrt{1 + [f'(d_i)]^2}\,\Delta x_i.$$

Esta expressão nos dá a área lateral do tronco de cone gerado pela rotação, em torno do eixo dos x, do segmento de reta $\overline{Q_{i-1}\,Q_i}$.

Somando as áreas laterais de todos os troncos de cone gerados pela rotação dos segmentos que compõem a linha poligonal, obtemos uma aproximação da área da superfície S, dada por

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\sqrt{1 + [f'(d_i)]^2}\,\Delta x_i.$$

Podemos observar que quando n cresce muito e cada Δx_i torna-se muito pequeno, a soma das áreas laterais dos n troncos de cone, aproxima-se do que intuitivamente entendemos como a área da superfície S.

8.6.1 Definição. Seja C uma curva de equação $y = f(x)$, onde f e f' são funções contínuas em $[a, b]$ e $f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in [a, b]$. A área da superfície de revolução S, gerada pela rotação da curva C ao redor do eixo dos x, é definida por

$$A = \lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\sqrt{1 + [f'(d_i)]^2}\,\Delta x_i. \qquad (4)$$

A soma que aparece em (*4*) não é exatamente uma soma de Riemann da função $f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$, pois aparecem dois pontos distintos c_i e d_i. No entanto, é possível mostrar que o limite em (*4*) é a integral desta função. Temos, então

$$\boxed{A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.} \qquad (5)$$

Observamos que, se ao invés de considerarmos uma curva $y = f(x)$ girando em torno do eixo dos x, considerarmos uma curva $x = g(y)$, $y \in [c, d]$ girando em torno do eixo dos y, a área será dada por

$$A = 2\pi \int_c^d g(y)\sqrt{1 + [g'(y)]^2}\,dy. \qquad (6)$$

8.6.2 Exemplos

(*i*) Calcular a área da superfície de revolução obtida pela rotação, em torno do eixo dos x, da curva dada por $y = 4\sqrt{x}$, $\frac{1}{4} \leq x \leq 4$.

Temos,

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx \\ &= 2\pi \int_{1/4}^{4} 4\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{x}}\,dx \end{aligned}$$

$$= 2\pi \int_{1/4}^{4} 4\sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x}}\, dx$$

$$= 8\pi \int_{1/4}^{4} \sqrt{x+4}\, dx$$

$$= 8\pi \left. \frac{(x+4)^{3/2}}{3/2} \right|_{1/4}^{4}$$

$$= \frac{16\pi}{3}\left(8^{3/2} - \left(\frac{17}{4}\right)^{3/2}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{3}\,(128\sqrt{2} - 17\sqrt{17}) \text{ u.a.}.$$

A Figura 8.33 ilustra este exemplo.

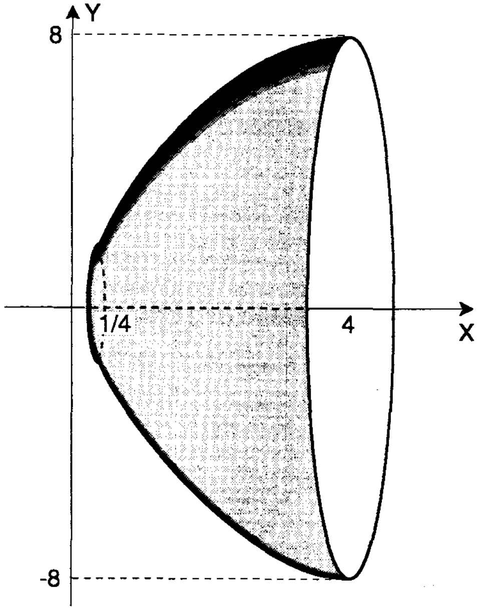


Figura 8-33

(*ii*) Calcular a área da superfície de revolução obtida pela rotação, em torno do eixo dos y, da curva dada por $x = y^3$, $0 \leq y \leq 1$.

Temos,

$$A = 2\pi \int_c^d g(y)\sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 y^3 \sqrt{1 + (3y^2)^2}\, dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 y^3 \sqrt{1 + 9y^4}\, dy.$$

Vamos agora, calcular a integral indefinida $I = \int y^3 \sqrt{1 + 9y^4}\, dy$. Fazendo a substituição $u = 1 + 9y^4$, temos $du = 36y^3\, dy$. Então,

$$I = \frac{1}{36} \int u^{1/2}\, du$$

$$= \frac{1}{36} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C$$

$$= \frac{1}{54} (1 + 9y^4)^{3/2} + C.$$

Portanto,

$$A = \frac{2\pi}{54} (1 + 9y^4)^{3/2} \Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{27} (10\sqrt{10} - 1)\ \text{u. a.}.$$

A Figura 8.34 ilustra este exemplo.

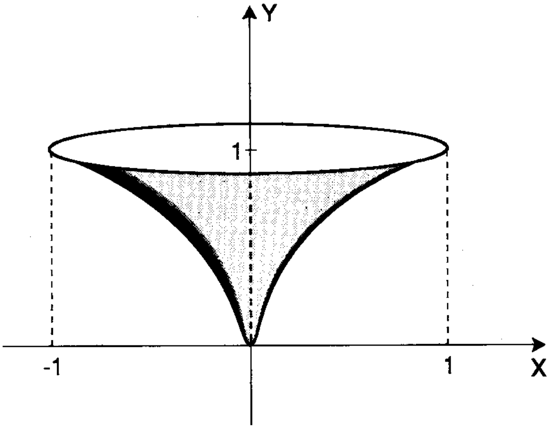


Figura 8-34

8.7 EXERCÍCIOS

Nos exercícios de 1 a 5, determinar o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno do eixo dos *x*, da região *R* delimitada pelos gráficos das equações dadas.

1. $y = x + 1$, $x = 0$, $x = 2$ e $y = 0$

2. $y = x^2 + 1$, $x = 0$, $x = 2$ e $y = 0$

3. $y = x^2$ e $y = x^3$

4. $y = \cos x$, $y = \operatorname{sen} x$, $x = 0$ e $x = \dfrac{\pi}{4}$

5. $y = x^3$, $x = -1$, $x = 1$ e $y = 0$

Nos exercícios de 6 a 10, determinar o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo dos *y*, da região *R* delimitada pelos gráficos das equações dadas.

6. $y = \ln x$, $y = -1$, $y = 2$ e $x = 0$

7. $y = x^3$ e $y = x^2$

8. $x = y^2 + 1$, $x = \dfrac{1}{2}$, $y = -2$ e $y = 2$

9. $y = \dfrac{1}{x}$, $x = 0$, $y = \dfrac{1}{4}$ e $y = 4$

10. $x = 3 + \operatorname{sen} y$, $x = 0$, $y = \dfrac{-5\pi}{2}$ e $y = \dfrac{5\pi}{2}$

Nos exercícios de 11 a 16, determinar o volume do sólido de revolução gerado pela rotação das regiões indicadas, ao redor dos eixos dados.

11. $y = 2x - 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$; ao redor do eixo dos x

12. $y^2 = 2x$, $x = 0$, $y = 0$ e $y = 2$; ao redor do eixo dos y

13. $y = 2x^2$, $x = 1$, $x = 2$ e $y = 2$; ao redor do eixo $y = 2$

14. $x = y^2$ e $x = 2 - y^2$; ao redor do eixo dos y

15. $y = x + x^2$, $y = x^2 - 1$ e $x = 0$; ao redor do eixo $y = 1$

16. $y = x^{2/3}$ e $y = 4$; ao redor dos eixos $x = -9$, $y = 0$ e $x = 0$

17. Encontrar o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo dos x, da região limitada por $y^2 = 16x$ e $y = 4x$.

18. Calcular o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $y = 2$, da região limitada por $y = 1 - x^2$, $x = -2$, $x = 2$ e $y = 2$.

19. Calcular o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $y = 2$, da região limitada por $y = 3 + x^2$, $x = -2$, $x = 2$ e $y = 2$.

20. Determinar o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $y = -2$, da região limitada por $y = \cos x$, $y = -2$, $x = 0$ e $x = 2\pi$.

21. Determinar o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $y = 2$, da região entre os gráficos de $y = \text{sen}\, x$, $y = \text{sen}^3 x$, de $x = 0$ até $x = \pi/2$

Nos exercícios de 22 a 27, calcular a área da superfície gerada pela rotação do arco de curva dado, em torno do eixo indicado.

22. $y = 2x^3$, $0 \leq x \leq 2$; eixo dos x

23. $x = \sqrt{y}$, $1 \leq y \leq 4$; eixo dos y

24. $y = x^2$, $-2 \leq x \leq 2$; eixo dos x

25. $y = \dfrac{1}{2} x$, $0 \leq x \leq 4$; eixo dos x

26. $y = \sqrt{4 - x^2}$, $0 \leq x \leq 1$; eixo dos x

27. $y = \sqrt{16 - x^2}$, $-3 \leq x \leq 3$; eixo dos x

28. Calcular a área da superfície obtida pela revolução do arco da parábola $y^2 = 8x$, $1 \leq x \leq 12$, ao redor do eixo dos x.

29. Calcular a área da superfície do cone gerado pela revolução do segmento de reta $y = 4x$, $0 \leq x \leq 2$:

(*a*) ao redor do eixo dos x; (*b*) ao redor do eixo dos y.

8.8 COORDENADAS POLARES

Até o presente momento, localizamos um ponto no plano por meio de suas coordenadas cartesianas retangulares. Existem outros sistemas de coordenadas. Um sistema bastante utilizado é o sistema de coordenadas polares.

No sistema de coordenadas polares, as coordenadas consistem de uma distância e da medida de um ângulo em relação a um ponto fixo e a uma semireta fixa.

A Figura 8.35 ilustra um ponto P num sistema de coordenadas polares.

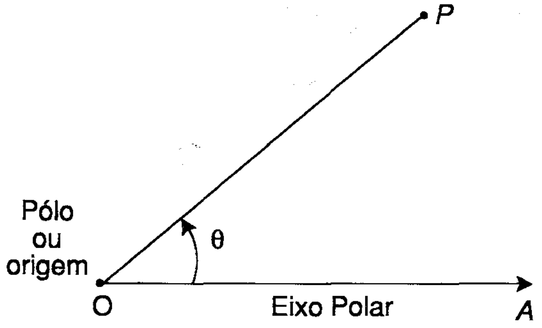


Figura 8-35

O ponto fixo, denotado por O, é chamado *pólo* ou *origem*.

A semireta fixa $\overrightarrow{OA}$ é chamada *eixo polar*.

O ponto P fica bem determinado através do par ordenado (r, θ), onde $|r|$ representa a distância entre a origem e o ponto P, e θ representa a medida, em radianos, do ângulo orientado $A\hat{O}P$.

Usaremos as seguintes convenções:

(i) Se o ângulo $A\hat{O}P$ for descrito no sentido anti-horário, então $\theta > 0$. Caso contrário, teremos $\theta < 0$.

(ii) Se $r < 0$, o ponto P estará localizado na extensão do lado terminal do ângulo $A\hat{O}P$.

(iii) O par ordenado $(0, \theta)$, θ qualquer, representará o pólo.

Observamos que, muitas vezes, o segmento $\overline{OP}$ é chamado *raio*.

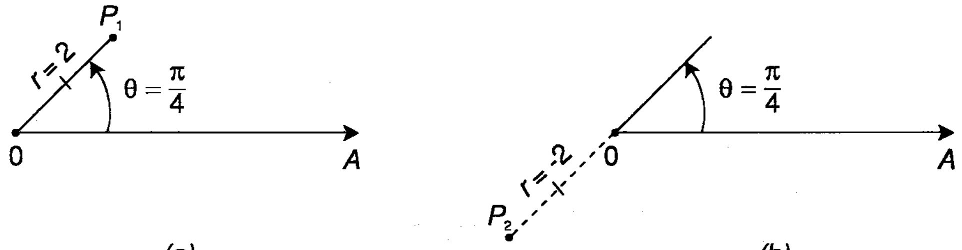
8.8.1 Exemplos

(i) Representar num sistema de coordenadas polares os seguintes pontos:

a) $P_1\ (2, \pi/4)$ b) $P_2\ (-2, \pi/4)$

c) $P_3\ (-2, -\pi/4)$ d) $P_4\ (2, -\pi/4)$.

A Figura 8.36 (a) e (b), representa os pontos P_1 e P_2, respectivamente.



(a) (b)

Figura 8-36

A Figura 8.37 (a) e (b), mostra os pontos P_3 e P_4, respectivamente.

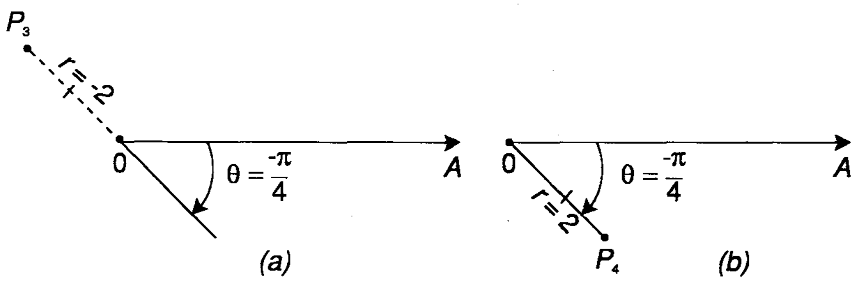


Figura 8-37

(*ii*) "O ponto *P*, tem um número ilimitado de pares de coordenadas polares."

Verificar esta afirmação para o ponto da Figura 8.38.

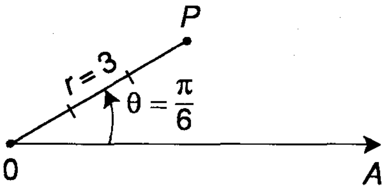


Figura 8-38

A Figura 8.39 mostra diversos pares de coordenadas polares do ponto *P*. Podemos observar que este ponto pode ser representado por todos os pares ordenados da forma

$$\left(3,\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right),\ k \in Z$$

ou,

$$\left(-3,\ \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right),\ k \in Z\,.$$

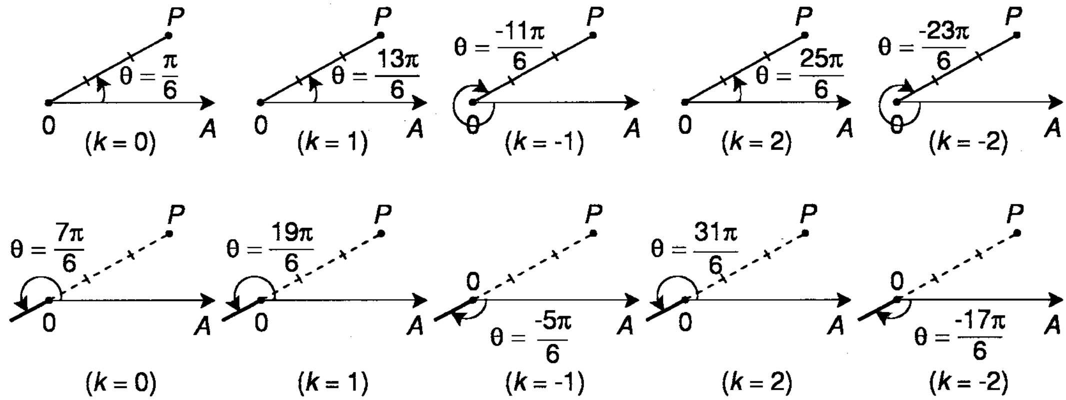


Figura 8-39

8.8.2 Relação entre o Sistema de Coordenadas Cartesianas Retangulares e o Sistema de Coordenadas Polares.

Em várias situações, surge a necessidade de nos referirmos a ambas, coordenadas cartesianas e coordenadas polares de um ponto P. Para viabilizar isto, fazemos a origem do primeiro sistema coincidir com o pólo do segundo sistema, o eixo polar com o eixo positivo dos x e o raio para o qual $\theta = \pi/2$ com o eixo positivo dos y (ver Figura 8.40).

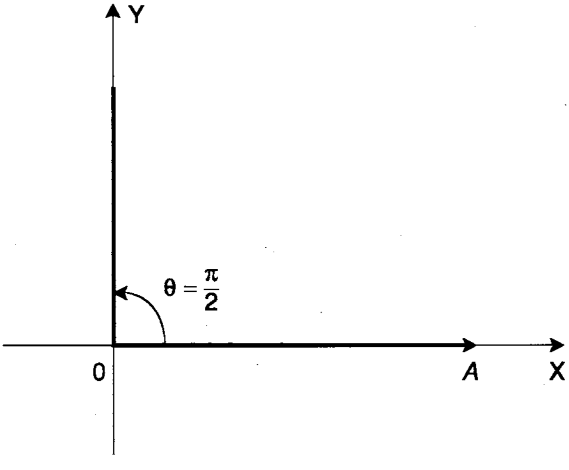
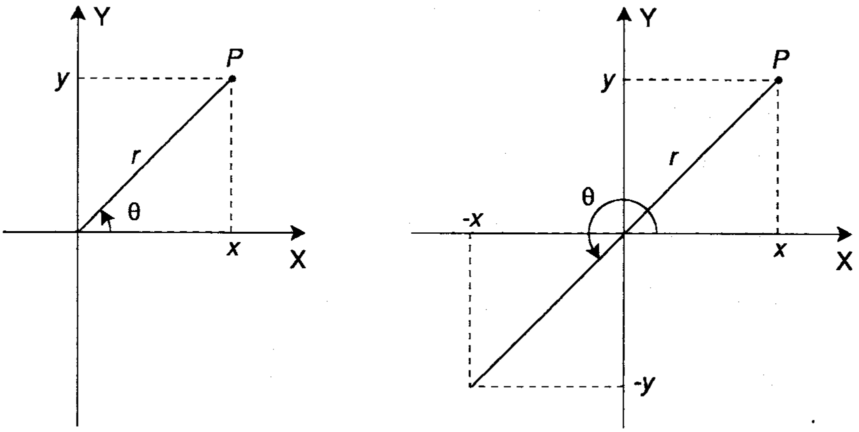


Figura 8-40

Supondo que P seja um ponto com coordenadas cartesianas (x, y) e coordenadas polares (r, θ), vamos analisar o caso em que o ponto P está no primeiro quadrante.

A Figura 8.41(a) e (b) ilustra o caso para $r > 0$ e $r < 0$, respectivamente.



(a) $r > 0$ (b) $r < 0$

Figura 8-41

Podemos observar que:

(i) Para $r > 0$, temos

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}.$$

(ii) Para $r < 0$, temos

$$\cos\theta = \frac{-x}{-r} = \frac{x}{r} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{-y}{-r} = \frac{y}{r}.$$

Portanto,

$$\begin{array}{|l|} \hline x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta\,. \\ \hline \end{array} \qquad (1)$$

Pode-se verificar a validade das relações encontradas, no caso em que o ponto P se encontra sobre um dos eixos ou num outro quadrante.

Usando (*1*), podemos deduzir outra relação muito usada.

Elevando ambos os membros das equações em (*1*) ao quadrado, podemos escrever

$$x^2 = r^2 \cos^2 \theta$$
$$y^2 = r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \ .$$

Adicionando membro a membro, obtemos:

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = r^2 \ .$$

Portanto,

$$r = \pm \sqrt{x^2 + y^2} \ .$$

8.8.3 Exemplos

(*i*) Encontrar as coordenadas cartesianas do ponto cujas coordenadas polares são $(-4, 7\pi/6)$.

Solução. A Figura 8.42 ilustra este ponto.

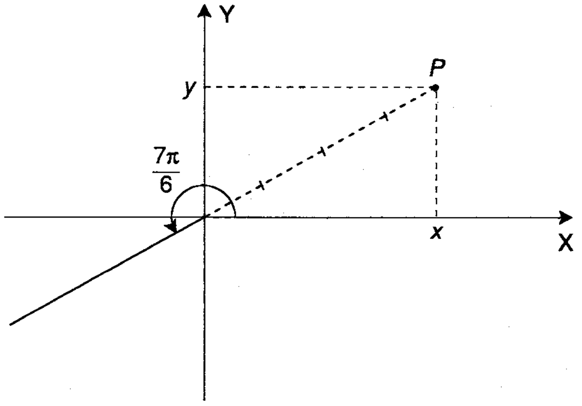


Figura 8-42

Temos,

$$x = r\cos\theta \qquad \text{e} \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

$$= -4\cos\frac{7\pi}{6} \qquad\qquad = -4\ \text{sen}\ \frac{7\pi}{6}$$

$$= -4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad\qquad = -4\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\sqrt{3} \qquad\qquad = 2.$$

Portanto, $(2\sqrt{3}\ ,\ 2)$ são as coordenadas cartesianas do ponto dado.

(*ii*) Encontrar $(r,\ \theta)$, supondo $r < 0$ e $0 \le \theta < 2\pi$ para o ponto P, cujas coordenadas cartesianas são $(\sqrt{3}\ ,\ -1)$.

Solução. A Figura 8.43 ilustra o ponto *P*.

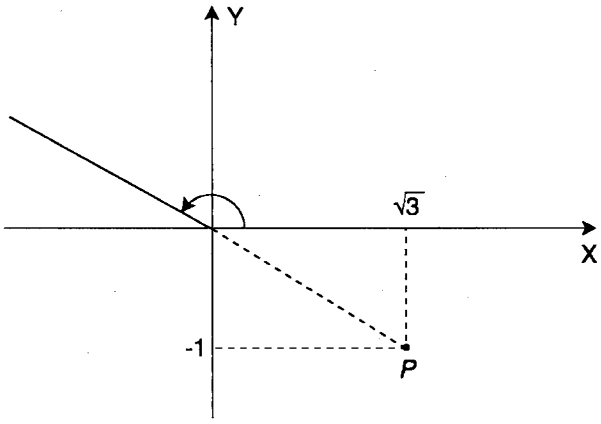


Figura 8-43

Temos,

$$\begin{aligned} r &= -\sqrt{x^2 + y^2} \\ &= -\sqrt{3 + 1} \\ &= -2\,; \end{aligned}$$

$$\cos\,\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{-2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e}$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$.

8.8.4 Gráficos de Equações em Coordenadas Polares.

O gráfico de $F(r, \theta) = 0$ é formado por todos os pontos cujas coordenadas polares satisfazem a equação. É comum apresentarmos a equação numa forma explícita, isto é,

$$r = f(\theta).$$

Na prática, os seguintes procedimentos poderão nos auxiliar no esboço do gráfico:

(*i*) calcular os pontos de máximos e/ou mínimos;

(*ii*) encontrar os valores de θ para os quais a curva passa pelo pólo;

(*iii*) verificar simetrias. Se,

- a equação não se altera quando substituirmos r por $-r$, existe simetria em relação à origem;
- a equação não se altera quando substituirmos θ por $-\theta$, existe simetria em relação ao eixo polar (ou eixo dos x);
- a equação não se altera quando substituirmos θ por $\pi - \theta$, existe simetria em relação ao eixo $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ (eixo dos y).

8.8.5 Exemplos

(*i*) Esboçar a curva $r = 2\,(1 - \cos\theta)$.

Como a equação não se altera ao substituirmos θ por $-\theta$, isto é,

$$r = 2\,(1 - \cos\theta) = 2\,(1 - \cos(-\theta)),$$

concluímos que existe simetria em relação ao eixo polar. Logo, basta analisar valores de θ tais que $0 \leq \theta \leq \pi$.

Para $0 \leq \theta \leq \pi$, encontramos um ponto de máximo $(4, \pi)$ e um ponto de mínimo $(0, 0)$. Observamos que, considerando $r = f(\theta)$, os pontos de máximos e mínimos podem ser encontrados de maneira análoga aos da Seção 5.7.

A Tabela 8.1 mostra alguns pontos da curva, cujo esboço é mostrado na Figura 8.44.

Tabela 8.1

θ	r
0	0
$\frac{\pi}{3}$	1
$\frac{\pi}{2}$	2
$\frac{2\pi}{3}$	3
π	4

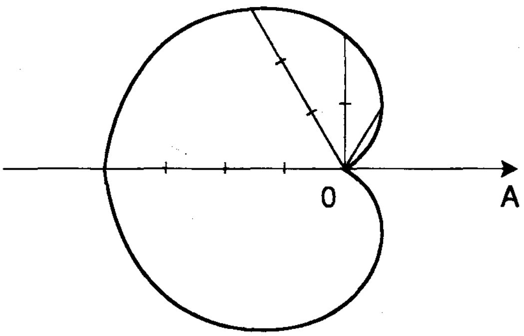


Figura 8-44

(*ii*) Esboçar a curva $r = 2\cos 2\theta$.

Analisando as simetrias, temos que

(*a*) A curva é simétrica em relação ao eixo dos x, pois

$$r = 2\cos(-2\theta) = 2\cos 2\theta.$$

(*b*) A curva é simétrica em relação ao eixo dos *y*, pois

$$r = 2 \cos [2(\pi - \theta)] = 2 \cos (2\pi - 2\theta) = 2 \cos 2\theta.$$

Logo, basta fazer uma tabela para $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

Em $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, a curva passa pelo pólo quando $\theta = \frac{\pi}{4}$, pois

$$r = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 2 \cos \frac{\pi}{2} = 0\,.$$

Podemos ainda verificar que, para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, temos um ponto de máximo (2, 0) e um ponto de mínimo $(-2\,,\ \pi/2)$.

Usando a Tabela 8.2 e os resultados anteriores, esboçamos a curva vista na Figura 8.45.

Tabela 8.2

θ	r
0	2
$\frac{\pi}{6}$	1
$\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{\pi}{3}$	-1
$\frac{\pi}{2}$	-2

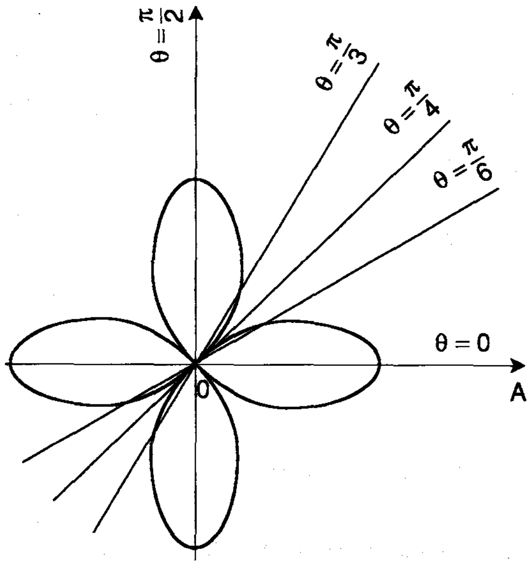


Figura 8-45

8.8.6 Algumas Equações em Coordenadas Polares e seus respectivos Gráficos.

(*1*) ***Equações de retas.***

(*a*) $\theta = \theta_0$ ou $\theta = \theta_0 \pm n\pi$, $n \in Z$ é uma reta que passa pelo pólo e faz um ângulo de θ_0 ou $\theta_0 \pm n\pi$ radianos com o eixo polar (ver Figura 8.46).

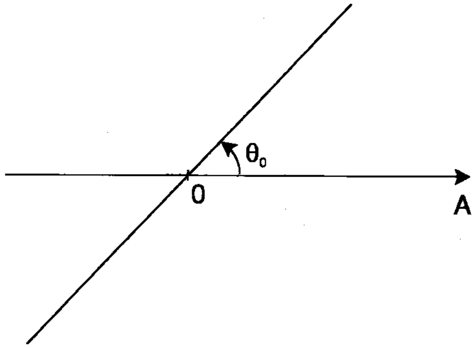


Figura 8-46

(*b*) r sen $\theta = a$ e $r \cos \theta = b$, $a, b \in \mathbb{R}$, são retas paralelas aos eixos polar e $\pi/2$, respectivamente (ver Figura 8.47).

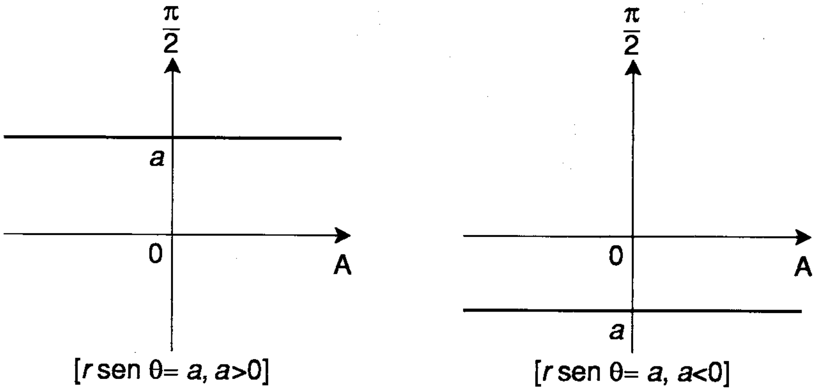


Figura 8-47

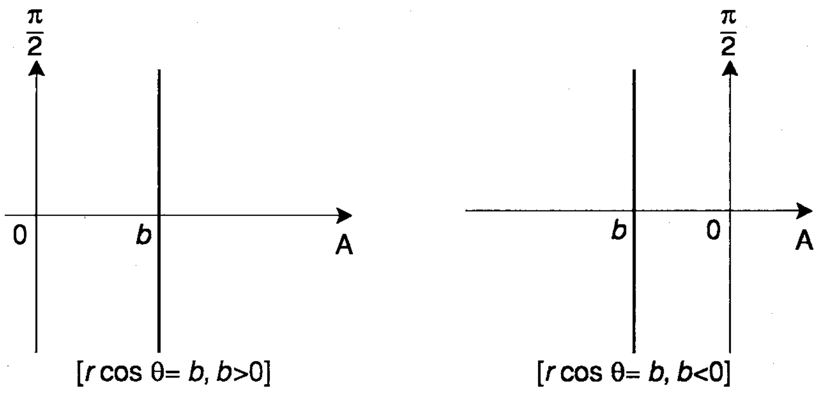


Figura 8-47 (*continuação*)

(2) ***Circunferências.***

(*a*) $r = c$, $c \in \mathbb{R}$ é uma circunferência centrada no pólo e raio $|c|$ (ver Figura 8.48).

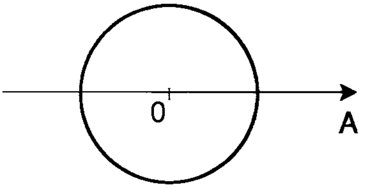


Figura 8-48

(*b*) $r = 2a \cos \theta$ é uma circunferência de centro no eixo polar, tangente ao eixo $\theta = \pi/2$:

– se $a > 0$, o gráfico está à direita do pólo;

– se $a < 0$, o gráfico está à esquerda do pólo (ver Figura 8.49).

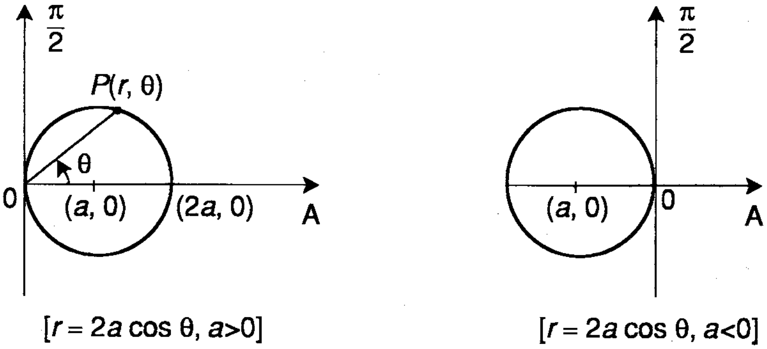


Figura 8-49

(*c*) $r = 2b$ sen θ é uma circunferência de centro no eixo $\frac{\pi}{2}$ e que tangencia o eixo polar:

- se $b > 0$, o gráfico está acima do pólo;
- se $b < 0$, o gráfico está abaixo do pólo (ver Figura 8.50).

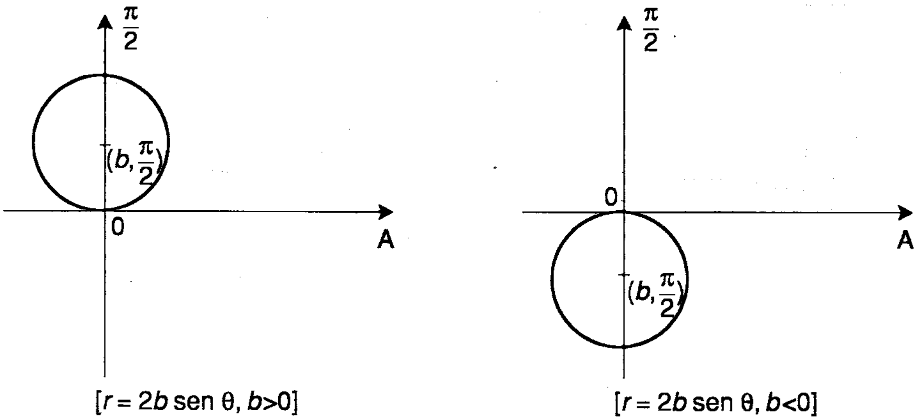


Figura 8-50

(3) ***Limaçons.***

$r = a \pm b \cos\theta$ ou $r = a \pm b$ sen θ, onde $a, b \in \mathbb{R}$ são limaçons.

Temos,

– se $b > a$, então o gráfico tem um laço (ver Figura 8.51);

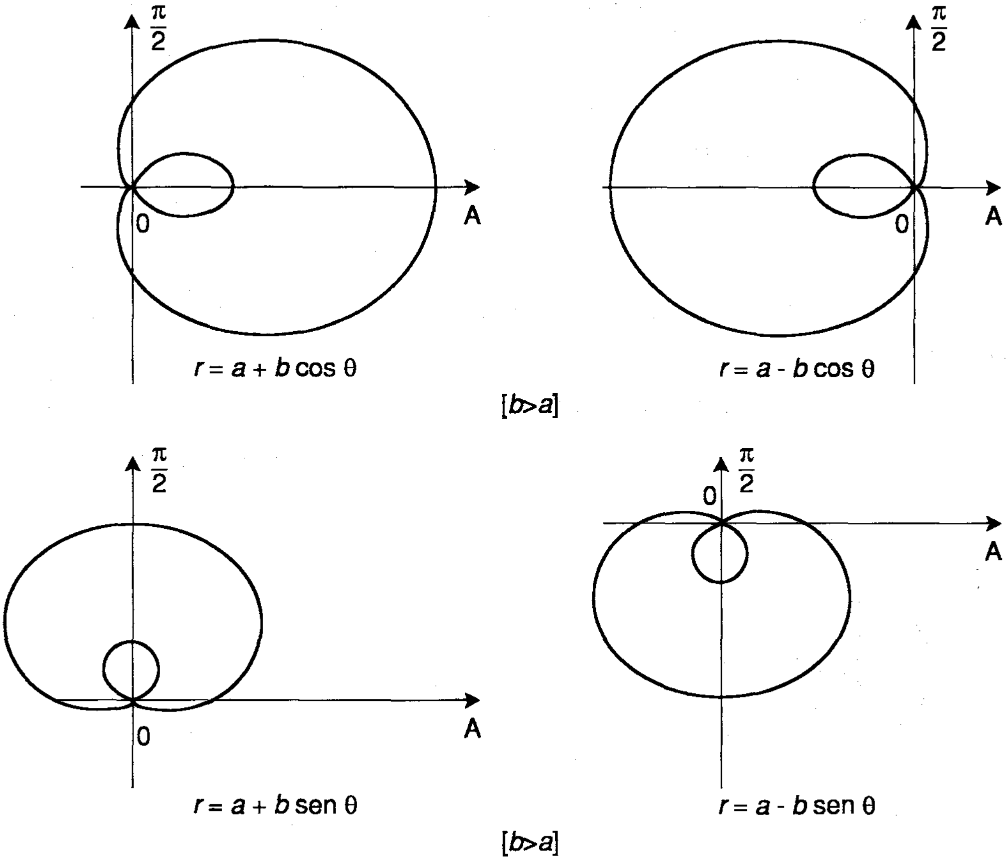


Figura 8-51

– se $b = a$, então o gráfico tem o formato de um coração, por isso é conhecido como *Cardióide* (ver Figura 8.52);

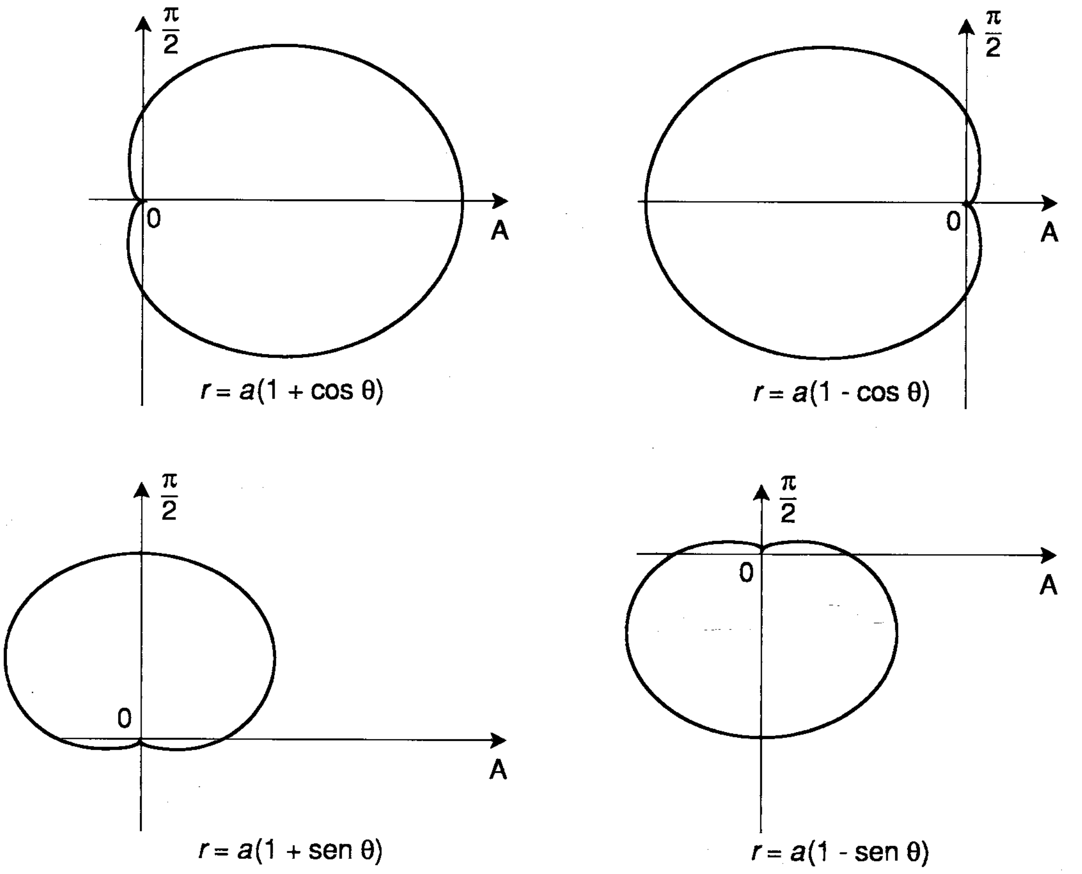


Figura 8-52

– se $b < a$, então o gráfico não tem laço (ver Figura 8.53).

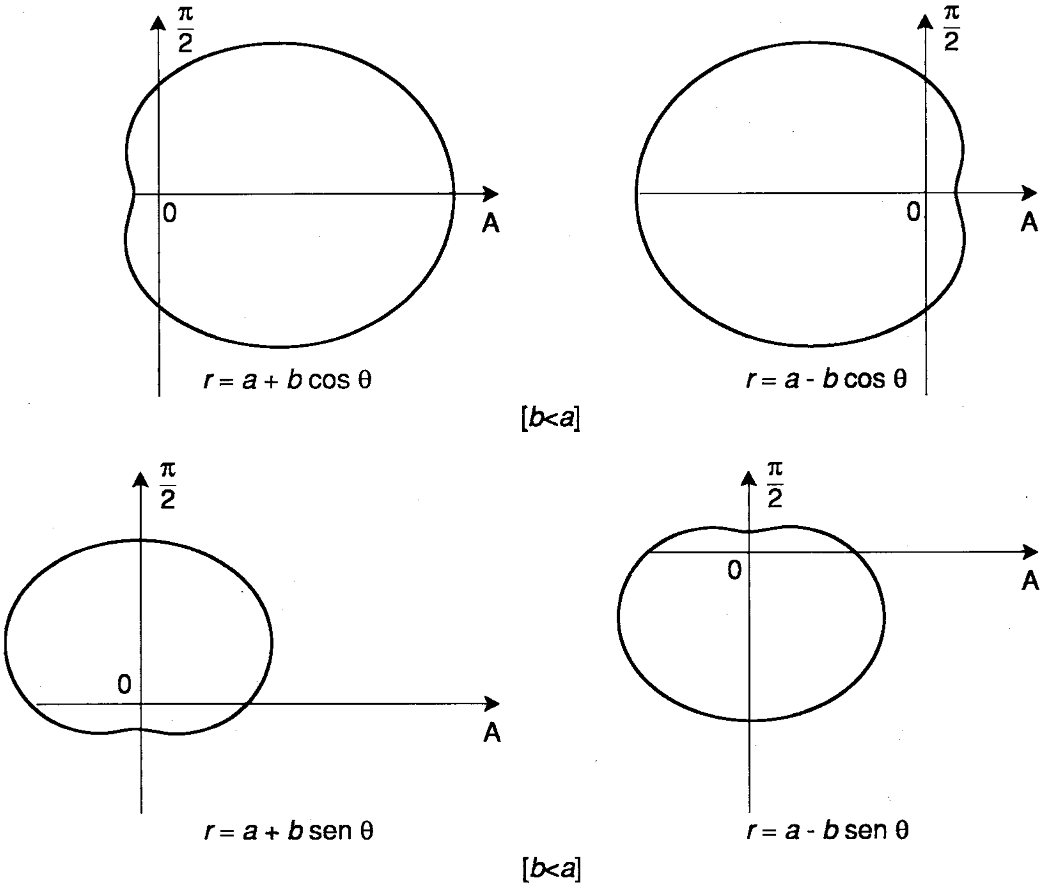


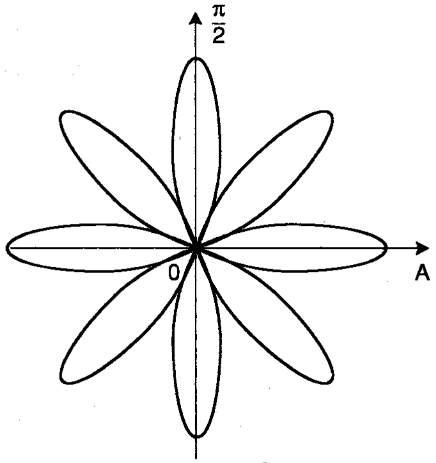
Figura 8-53

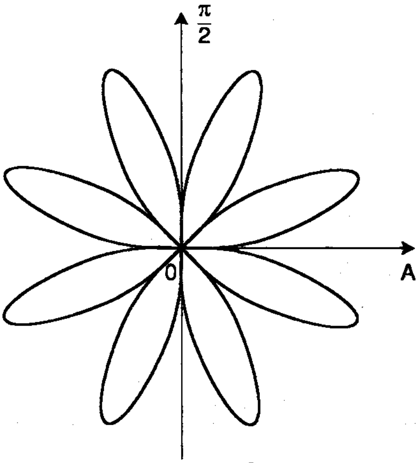
Observamos que na Figura 8.51 usamos $a = 1$ e $b = 2$, na Figura 8.52 usamos $a = b = 1$ e na Figura 8.53 usamos $a = 3$ e $b = 2$.

(*4*) ***Rosáceas***.

$r = a \cos n\,\theta$ ou $r = a$ sen $n\,\theta$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ são rosáceas:

– se n é par temos uma rosácea de $2n$ pétalas (ver Figura 8.54);

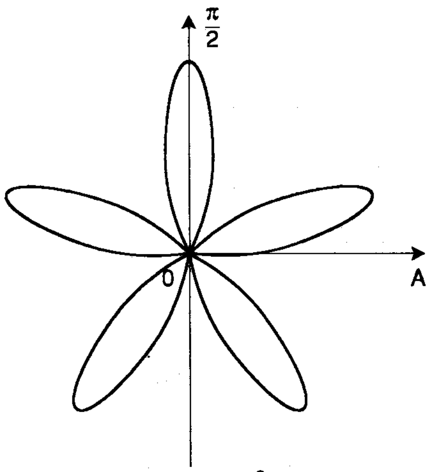


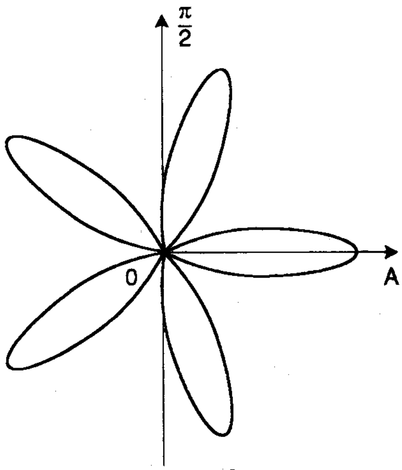


[n par]

Figura 8-54

– se n é ímpar temos uma rosácea de n pétalas (ver Figura 8.55).





[n ímpar]

Figura 8-55

Observamos que na Figura 8.54 usamos $a = 1$ e $n = 4$, na Figura 8.55 usamos $a = 1$ e $n = 5$.

(5) ***Lemniscatas.***

$r^2 = \pm\ a^2 \cos 2\theta$ ou $r^2 = \pm\ a^2 \text{ sen } 2\theta$, onde $a \in \mathbb{R}$ são lemniscatas (ver Figura 8.56).

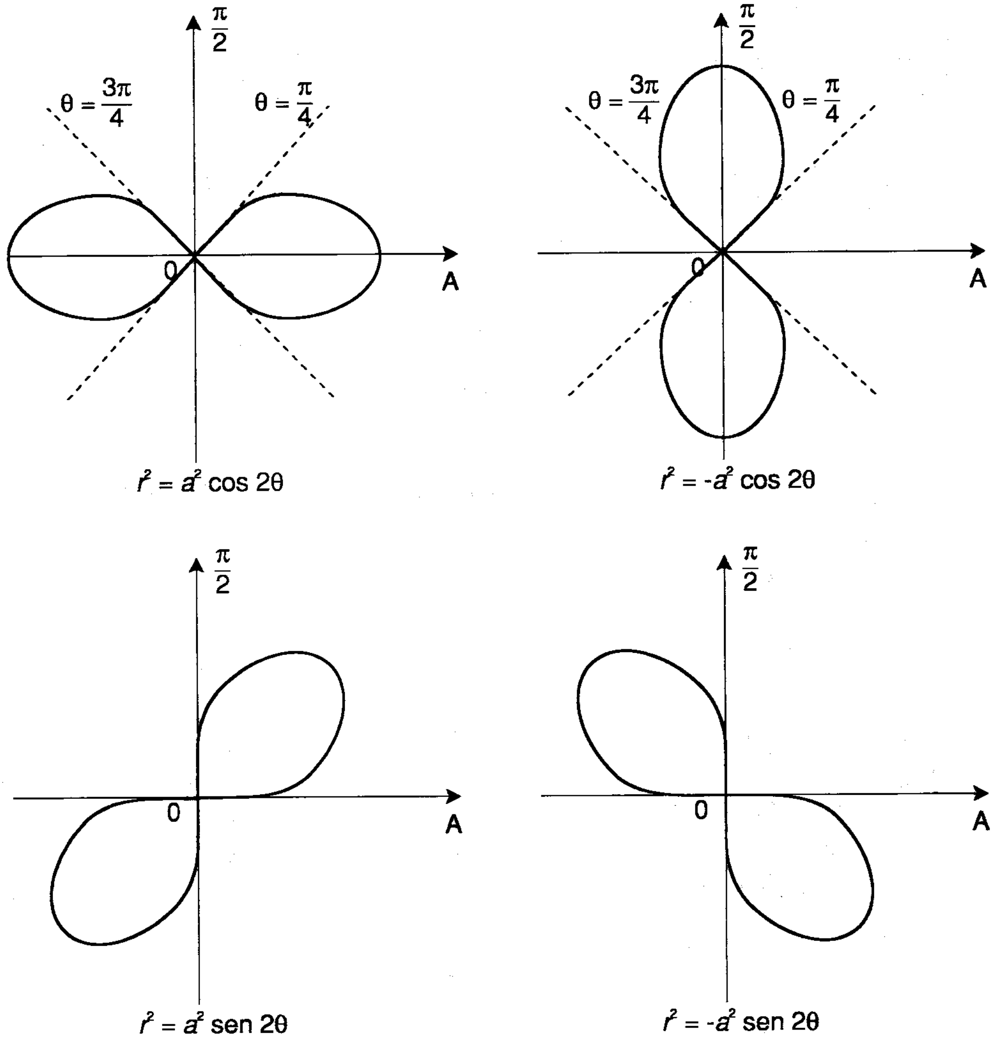


Figura 8-56

Observamos que na Figura 8.56 usamos $a = 1$.

(*6*) ***Espirais.***

As equações seguintes representam algumas espirais:

(*a*) $r\,\theta = a,\ a > 0$ – espiral hiperbólica;

(*b*) $r = a\,\theta,\ a > 0$ – espiral de Arquimedes;

(*c*) $r = e^{a\theta}$ – espiral logarítmica;

(*d*) $r^2 = \theta$ – espiral parabólica.

As Figuras 8.57 a 8.60 ilustram estas espirais.

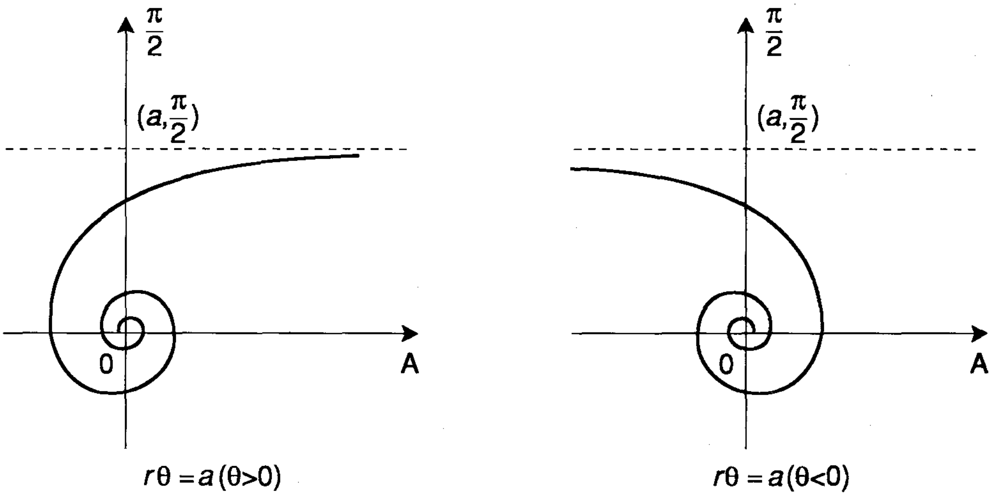
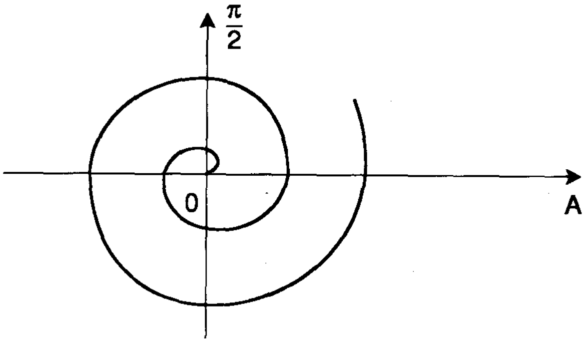
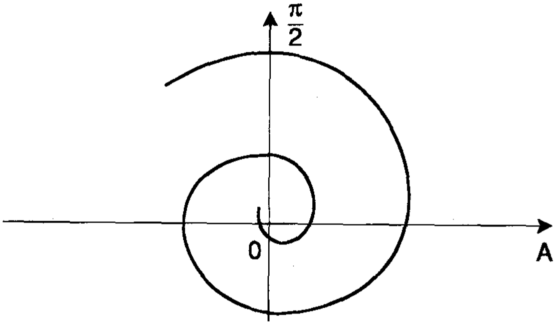


Figura 8-57



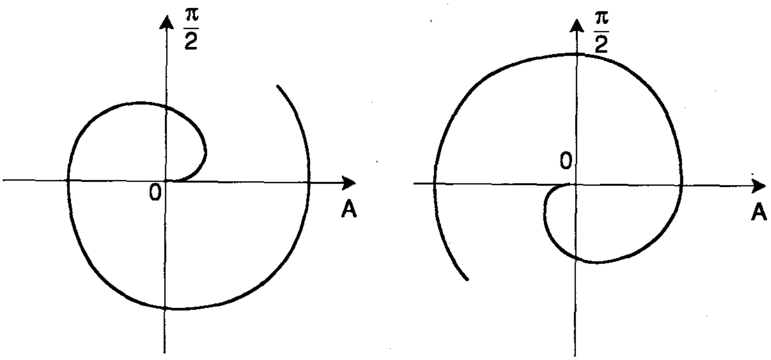
$r = a\theta(\theta \geq 0)$

Figura 8-58



$r = e^{a\theta}$

Figura 8-59



$r = \sqrt{\theta}$ $r = -\sqrt{\theta}$

Figura 8-60

8.9 COMPRIMENTO DE ARCO DE UMA CURVA DADA EM COORDENADAS POLARES

Seja uma curva C dada pelas sua equação polar

$$r = f(\theta). \qquad (1)$$

Sabemos da Seção 8.8.2, que

$$\begin{aligned} x &= r \cos\theta \\ y &= r \operatorname{sen}\theta \,. \end{aligned} \qquad (2)$$

Aplicando (*1*) em (*2*), vem

$$\begin{aligned} x &= f(\theta) \cos\theta \\ y &= f(\theta) \operatorname{sen}\theta \,. \end{aligned}$$

Essas equações podem ser consideradas como as equações paramétricas da curva C, para $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$. Então, conforme vimos em 4.18, temos

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta) \cos\theta - f(\theta) \operatorname{sen}\theta \,;$$

$$\frac{dy}{d\theta} = f'(\theta) \operatorname{sen}\theta + f(\theta) \cos\theta \,.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= (f'(\theta) \cos\theta - f(\theta) \operatorname{sen}\theta)^2 + (f'(\theta) \operatorname{sen}\theta + f(\theta) \cos\theta)^2 \\ &= f'(\theta)^2 \cos^2\theta - 2f'(\theta)\, f(\theta) \cos\theta \operatorname{sen}\theta \\ &\quad + f(\theta)^2 \operatorname{sen}^2\theta + f'(\theta)^2 \operatorname{sen}^2\theta \\ &\quad + 2f'(\theta)\, f(\theta) \operatorname{sen}\theta \cos\theta + f(\theta)^2 \cos^2\theta \end{aligned}$$

$$= f'(\theta)^2\ [\cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta] + f(\theta)\ [\cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta]$$

$$= f'(\theta)^2 + f(\theta)^2.$$

Substituindo estes resultados na fórmula obtida na Seção 8.2, obtemos

$$s = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2}\, d\theta.$$

8.9.1 Exemplos

(*i*) Calcular o comprimento da cardióide $r = 1 + \cos\theta$.

Solução. Observando a Figura 8.52, verificamos a simetria em relação ao eixo polar. Calculamos, então, o comprimento da curva somente para $\theta \in [0, \pi]$.

Temos,

$$s = \int_0^{\pi} \sqrt{(-\text{sen}\,\theta)^2 + (1 + \cos\theta)^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{\text{sen}^2\,\theta + 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{2\,(1 + \cos\theta)}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{2}\,\sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} 2\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$= 2 \cdot 2\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi}$$

$$= 4 \text{ unidades de comprimento (u.c.).}$$

Portanto, o comprimento total da cardióide $r = 1 + \cos\theta$ é 8 u. c.

(*ii*) Encontrar a integral que dá o comprimento da curva $r = 1 - 2\cos\theta$.

A Figura 8.61 mostra o gráfico para $\theta \in [0, \pi]$. Observamos que esta limaçon apresenta simetria em relação ao eixo polar. Podemos escrever,

$$s = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(2\,\text{sen}\,\theta)^2 + (1 - 2\cos\theta)^2}\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{4\,\text{sen}^2\,\theta + 1 - 4\cos\theta + 4\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{5 - 4\cos\theta}\,d\theta\,.$$

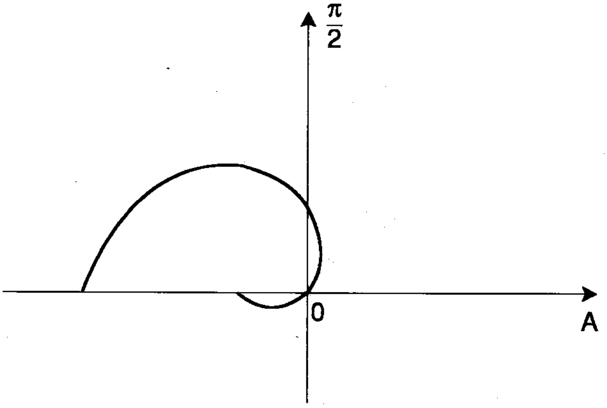


Figura 8-61

(*iii*) Determinar o comprimento da espiral $r = e^\theta$, para $\theta \in [0, 2\pi]$.

A Figura 8.62 mostra a espiral para $\theta \in [0, 2\pi]$.

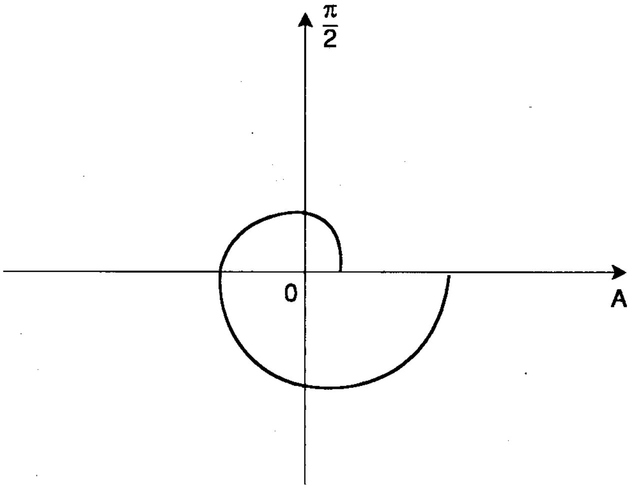


Figura 8-62

Temos,

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(e^\theta)^2 + (e^\theta)^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2\, e^{2\theta}}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, e^\theta\, d\theta$$

$$= \sqrt{2}\, e^\theta \Big|_0^{2\pi}$$

$$= \sqrt{2}\,(e^{2\pi} - e^{0})$$

$$= \sqrt{2}\,(e^{2\pi} - 1) \text{ u. c.}.$$

8.10 ÁREA DE FIGURAS PLANAS EM COORDENADAS POLARES

Queremos encontrar a área A, da figura delimitada pelas retas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ e pela curva $r = f(\theta)$ (ver Figura 8.63).

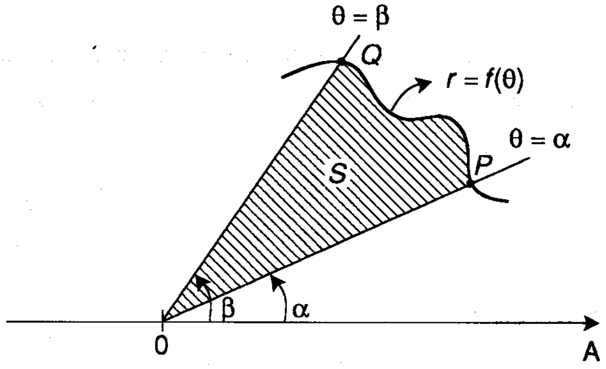


Figura 8-63

Seja f uma função contínua e não negativa em $[\alpha, \beta]$. Consideremos uma partição P de $[\alpha, \beta]$ dada por

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_{i-1} < \theta_i < \ldots < \theta_n = \beta .$$

A Figura 8.64 exemplifica esta partição para $n = 4$.

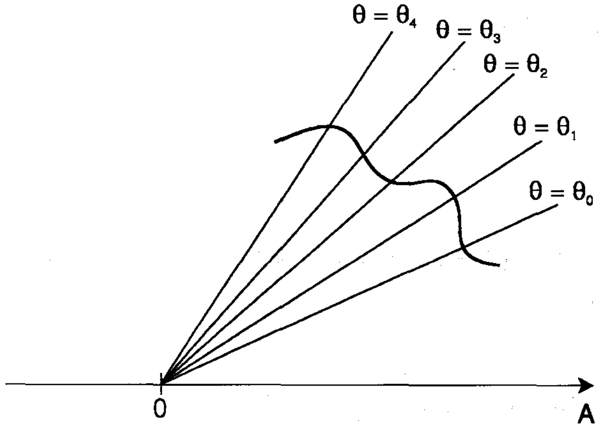


Figura 8-64

Para cada $[\theta_{i-1}, \theta_i]$, $i = 1, ..., n$, vamos considerar um setor circular de raio $f(\rho_i)$, e ângulo central $\Delta\theta_i$, onde $\theta_{i-1} < \rho_i < \theta_i$ e $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ (ver Figura 8.65).

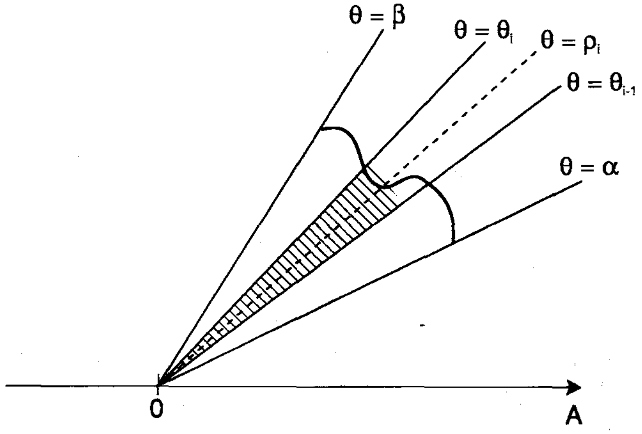


Figura 8-65

A área de i-ésimo setor circular é dada por

$$\frac{1}{2}\,[f(\rho_i)]^2\,\Delta\theta_i\,.$$

Logo, a área A é aproximadamente igual a A_n, sendo

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} [f(\rho_i)]^2 \Delta \theta_i$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} [f(\rho_i)]^2 \Delta \theta_i .$$

Podemos observar que à medida que n cresce muito e cada $\Delta \theta_i$, $i = 1, ..., n$, torna-se muito pequeno, A_n aproxima-se do que intuitivamente entendemos como a área da região delimitada por $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ e $r = f(\theta)$.

Portanto, escrevemos

$$A = \lim_{\text{máx } \Delta x_i \to 0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} [f(\rho_i)]^2 \Delta \theta_i$$

ou,

$$\boxed{A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 \, d\theta .}$$

8.10.1 Exemplos

(*i*) Encontrar a área da região S, limitada pelo gráfico de $r = 3 + 2 \text{ sen } \theta$.

A Figura 8.66 mostra a região S. Observando a simetria em relação ao eixo $\pi/2$, podemos escrever

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (3 + 2 \text{ sen } \theta)^2 \, d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (9 + 12 \text{ sen } \theta + 4 \text{ sen}^2 \theta) \, d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(9 + 12 \text{ sen } \theta + 4 \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= 9\theta - 12 \cos\theta + 2\left(\theta - \frac{1}{2} \text{ sen } 2\theta\right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= 9 \cdot \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 9 \cdot \frac{-\pi}{2} - 2 \cdot \frac{-\pi}{2}$$

$$= 11\pi \text{ u.a.}.$$

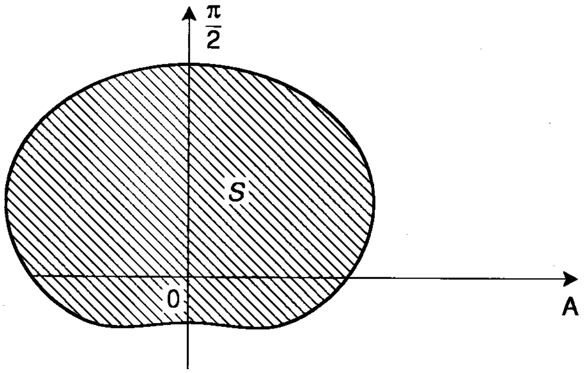


Figura 8-66

(*ii*) Encontrar a área da região S, interior à circunferência $r = 2\cos\theta$ e exterior à cardióide $r = 2 - 2\cos\theta$.

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} r = 2 \cos \theta \\ r = 2 - 2 \cos \theta, \end{cases}$$

encontramos os pontos de intersecção das duas curvas.

Temos,

$$2 \cos \theta = 2 - 2 \cos \theta$$

$$4 \cos \theta = 2$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}.$$

Assim, $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $\theta = \frac{5\pi}{3}$.

A Figura 8.67 mostra a região S.

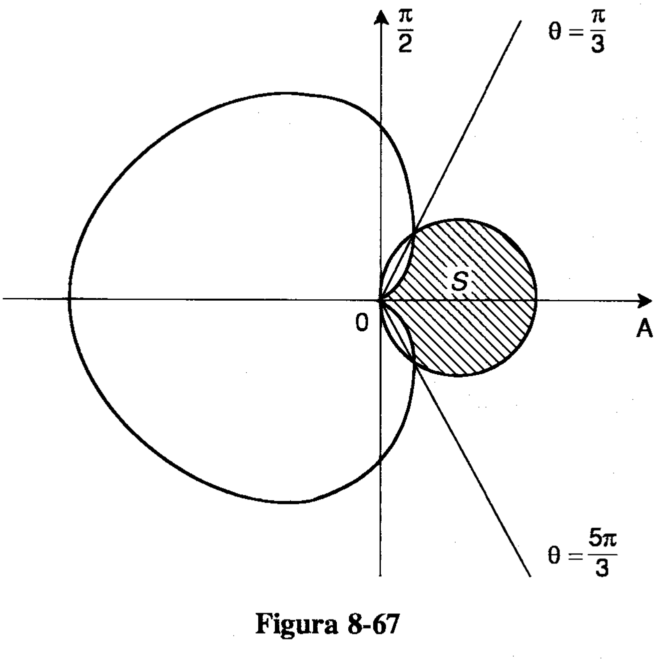


Figura 8-67

Observando a simetria, geometricamente, podemos visualizar que a área procurada é dada por

$$A = 2\ (A_1 - A_2),$$ onde

$$A_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} (2 \cos \theta)^2 \, d\theta$$

e

$$A_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} (2 - 2 \cos \theta)^2 \, d\theta .$$

Portanto,

$$A = \int_0^{\pi/3} [(2 \cos \theta)^2 - (2 - 2 \cos \theta)^2] \, d\theta .$$

$$= \int_0^{\pi/3} (4 \cos^2 \theta - 4 + 8 \cos \theta - 4 \cos^2 \theta) \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/3} (8 \cos \theta - 4) \, d\theta$$

$$= 8 \operatorname{sen} \theta - 4 \theta \Big|_0^{\pi/3}$$

$$= 8 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} - 4 \frac{\pi}{3}$$

$$= 4 \sqrt{3} - \frac{4 \pi}{3} \text{ u. a. .}$$

8.11 EXERCÍCIOS

1. Demarcar os seguintes pontos no sistema de coordenadas polares.

(*a*) $P_1(4, \pi/4)$ (*b*) $P_2(4, -\pi/4)$

(*c*) $P_3(-4, \pi/4)$ (*d*) $P_4(-4, -\pi/4)$

2. Em cada um dos itens, assinalar o ponto dado em coordenadas polares e depois escrever as coordenadas polares para o mesmo ponto, tais que:

(*i*) r tenha sinal contrário;

(*ii*) θ tenha sinal contrário.

(*a*) $(2, \pi/4)$ (*b*) $(\sqrt{2}, -\pi/3)$

(*c*) $(-5, 2\pi/3)$ (*d*) $(4, 5\pi/6)$

3. Demarcar os seguintes pontos no sistema de coordenadas polares e encontrar suas coordenadas cartesianas.

(*a*) $(3, \pi/3)$ (*b*) $(-3, \pi/3)$

(*c*) $(3, -\pi/3)$ (*d*) $(-3, -\pi/3)$

4. Encontrar as coordenadas cartesianas dos seguintes pontos dados em coordenadas polares.

(*a*) $(-2, 2\pi/3)$ (*b*) $(4, 5\pi/8)$

(*c*) $(3, 13\pi/4)$ (*d*) $(-10, \pi/2)$

(*e*) $(-10, 3\pi/2)$ (*f*) $(1, 0)$

5. Encontrar um par de coordenadas polares dos seguintes pontos:

(*a*) $(1, 1)$ (*b*) $(-1, 1)$

(*c*) $(-1, -1)$ (*d*) $(1, -1)$

6. Usar

(a) $r > 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$;

(b) $r < 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$;

(c) $r > 0$ e $-2\pi < \theta \leq 0$;

(d) $r < 0$ e $-2\pi < \theta \leq 0$;

para escrever os pontos $P_1(\sqrt{3}, -1)$ e $P_2(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, em coordenadas polares.

7. Transformar as seguintes equações para coordenadas polares

(a) $x^2 + y^2 = 4$

(b) $x = 4$

(c) $y = 2$

(d) $y + x = 0$

(e) $x^2 + y^2 - 2x = 0$

(f) $x^2 + y^2 - 6y = 0$

8. Transformar as seguintes equações para coordenadas cartesianas.

(a) $r = \cos\theta$

(b) $r = 2 \operatorname{sen}\theta$

(c) $r = \dfrac{1}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}$

(d) $r = a$, $a > 0$.

Nos exercícios de 9 a 32 esboçar o gráfico das curvas dadas em coordenadas polares.

9. $r = 1 + 2\cos\theta$

10. $r = 1 - 2\operatorname{sen}\theta$

11. $r = a \pm b\cos\theta$
$a = 2$ e $b = 3$; $a = 3$ e $b = 2$; $a = b = 3$

12. $r = \cos 3\theta$

13. $r = 2\cos 3\theta$

14. $r = 2\operatorname{sen} 2\theta$

15. $r = 2 - \cos\theta$

16. $r = 2 - \operatorname{sen}\theta$

17. $r = a \pm b\operatorname{sen}\theta$
$a = 2$ e $b = 3$; $a = 3$ e $b = 2$; $a = b = 2$

18. $r\cos\theta = 5$

19. $r = 2\operatorname{sen} 3\theta$

20. $\theta = \pi/4$

21. $\theta = \pi/9$

22. $5r\cos\theta = -10$

23. $r^2 = 4 \cos 2\theta$

24. $r = 3\theta$, $\theta \geq 0$

25. $r = 4 \text{ sen } \theta$

26. $r = e^{-\theta}$, $\theta \geq 0$

27. $r = \sqrt{2}$

28. $r = 10 \cos \theta$

29. $r = 2 \mid \cos \theta \mid$

30. $r = 12 \text{ sen } \theta$

31. $r = e^{\theta/3}$

32. $r = 2\theta$

Nos exercícios 33 a 37, encontrar o comprimento de arco da curva dada.

33. $r = e^{\theta}$, entre $\theta = 0$ e $\theta = \pi/3$

34. $r = 1 + \cos \theta$

35. $r = 2a \text{ sen } \theta$

36. $r = 3\theta^2$, de $\theta = 0$ até $\theta = 2\pi/3$

37. $r = e^{2\theta}$, de $\theta = 0$ até $\theta = 3\pi/2$.

38. Achar o comprimento da cardióide $r = 10(1 - \cos \theta)$.

Nos exercícios 39 a 46, encontrar a integral que dá o comprimento total da curva dada.

39. $r^2 = 9 \cos 2\theta$

40. $r = 3 \text{ sen } 3\theta$

41. $r = 4 \cos 4\theta$

42. $r^2 = 9 \text{ sen } 2\theta$

43. $r = 2 - 3 \cos \theta$

44. $r = 4 - 2 \text{ sen } \theta$

45. $r = 3 + 2 \cos \theta$

46. $r = 4 + 2 \text{ sen } \theta$

Nos exercícios 47 a 56, calcular a área limitada pela curva dada.

47. $r^2 = 9 \text{ sen } 2\theta$

48. $r = \cos 3\theta$

49. $r = 2 - \cos \theta$

50. $r^2 = 16 \cos 2\theta$

51. $r = 3 \text{ sen } 2\theta$

52. $r = 3 - 2 \cos \theta$

53. $r = 4(1 + \cos \theta)$

54. $r = 4(1 - \cos \theta)$

55. $r = 4(1 + \text{sen } \theta)$

56. $r = 4(1 - \text{sen } \theta)$

57. Encontrar a área da intersecção entre $r = 2a \cos \theta$ e $r = 2a \operatorname{sen} \theta$.

58. Encontrar a área interior ao círculo $r = 6 \cos \theta$ e exterior a $r = 2(1 + \cos \theta)$.

59. Encontrar a área interior ao círculo $r = 4$ e exterior à cardióide $r = 4(1 - \cos \theta)$.

60. Encontrar a área da região do primeiro quadrante delimitada pelo primeiro laço da espiral $r = 2\theta$, $\theta \geq 0$ e pelas retas $\theta = \pi/4$ e $\theta = \pi/3$.

61. Encontrar a área da região delimitada pelo laço interno da limaçon $r = 1 + 2 \operatorname{sen} \theta$.

62. Encontrar a área da região interior ao círculo $r = 10$ e à direita da reta $r \cos \theta = 6$.

63. Calcular a área da região entre as curvas:

(*a*) $2r = 3$ e $r = 3 \operatorname{sen} \theta$; (*b*) $2r = 3$ e $r = 1 + \cos \theta$.

8.12 MASSA E CENTRO DE MASSA DE UMA BARRA

Inicialmente, vamos descrever o conceito de centro de massa de um sistema constituído por um número finito de partículas, localizadas sobre um eixo L, de peso e espessura insignificantes.

Vamos supor que o eixo L esteja na posição horizontal e imaginemos que ele possa girar livremente em torno de um ponto P, como se nesse ponto fosse colocado um apoio (ver Figura 8.68).

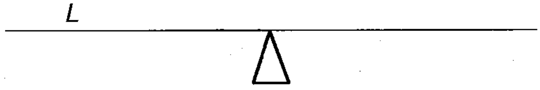


Figura 8-68

Se colocarmos sobre L um objeto de peso w_1 a uma distância d, à direita de P, o peso do objeto fará L girar no sentido horário (ver Figura 8.69(*a*)). Colocando um objeto de peso w_2, a uma distância d_2 à esquerda de P, o peso desse objeto fará L girar no sentido anti-horário (ver Figura 8.69(*b*)).

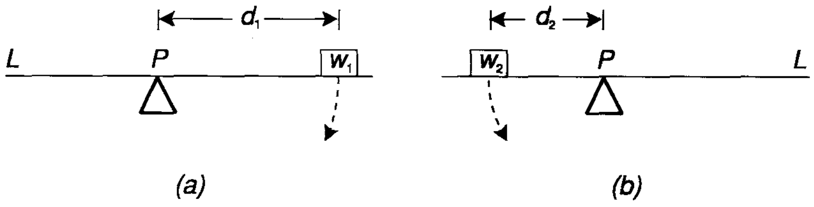


Figura 8-69

Colocando simultaneamente os dois objetos sobre L (ver Figura 8.70), o equilíbrio ocorre quando

$$w_1\, d_1 = w_2\, d_2. \qquad (1)$$

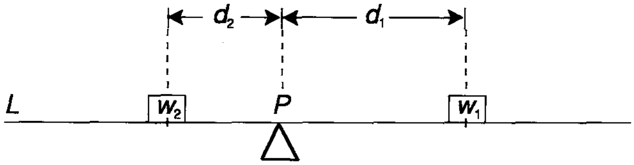


Figura 8-70

Este resultado é conhecido como *Lei da Alavanca* e foi descoberto por Arquimedes. Na prática, podemos constatá-lo quando duas crianças se balançam numa gangorra.

Vamos, agora, orientar L e fazê-lo coincidir com o eixo dos x do sistema de coordenadas cartesianas. Se duas partículas de peso w_1 e w_2 estão localizadas nos pontos x_1 e x_2, respectivamente (ver Figura 8.71), podemos reescrever (*1*) como

$$w_1(x_1 - P) = w_2(P - x_2) \qquad \text{ou} \qquad w_1(x_1 - P) + w_2(x_2 - P) = 0.$$

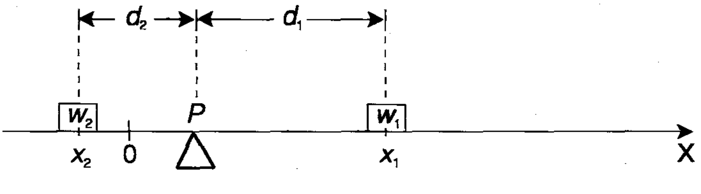


Figura 8-71

Supondo que n partículas de pesos $w_1, w_2, ..., w_n$ estejam colocadas nos pontos $x_1, x_2, ..., x_n$, respectivamente, o sistema estará em equilíbrio ao redor de P, quando

$$\sum_{i=1}^{n} w_i (x_i - P) = 0 . \tag{2}$$

Como o peso de um corpo é dado por $w = mg$, onde g é a aceleração da gravidade e m é a massa do corpo, considerando g constante, podemos reescrever (2) como

$$\sum_{i=1}^{n} m_i g(x_i - P) = 0 ,$$

ou de forma equivalente,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - P) = 0 .$$

A soma $\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - P)$ mede a tendência do sistema girar ao redor do ponto P e é chamada *momento do sistema em relação a P*. Quando o momento é positivo, o giro se dá no sentido horário. Quando o momento é negativo, o giro se dá no sentido anti-horário e, obviamente, quando o momento é nulo o sistema está em equilíbrio.

Se o sistema não está em equilíbrio, movendo o ponto P, podemos encontrar um ponto $\bar{x}$, de tal forma que ocorra o equilíbrio, isto é, um ponto $\bar{x}$ tal que o momento do sistema em relação a $\bar{x}$ seja nulo. O ponto $\bar{x}$ deve satisfazer

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - \bar{x}) = 0.$$

Resolvendo esta equação para $\bar{x}$, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\, x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{x} = 0$$

ou,

$$\bar{x} \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

ou ainda,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \qquad (3)$$

O ponto $\bar{x}$ que satisfaz (3) é chamado *centro de massa* do sistema dado.

Sob a hipótese da aceleração da gravidade ser constante, $\bar{x}$ também é chamado *centro de gravidade do sistema*.

É interessante observar que, na expressão (3), o numerador do lado direito é o momento do sistema em relação à origem e que o denominador é a massa total do sistema.

Queremos a seguir, mostrar como a integração pode ser usada para estender essas idéias a um sistema que, ao invés de ser constituído por um número finito de partículas, apresenta uma distribuição contínua de massa.

Consideremos uma barra horizontal rígida, de comprimento l. Se a sua densidade linear ρ, que é definida como massa por unidade de comprimento, é constante, dizemos que a barra é homogênea. Neste caso, intuitivamente, percebemos que a massa total da barra é dada por ρl e que o centro de massa deve estar localizado no ponto médio da barra.

Suponhamos agora, que temos uma barra não homogênea. Localizemos a barra sobre o eixo dos x, com as extremidades nos pontos a e b, como mostra a Figura 8.72.

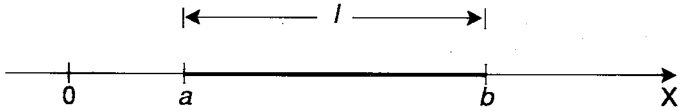


Figura 8-72

Seja $\rho(x)$, $x \in [a, b]$ uma função contínua que representa a densidade linear da barra. Para encontrar a massa total da barra, vamos considerar uma partição P de $[a, b]$, dada pelos pontos

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b.$$

Sejam c_i um ponto qualquer do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ e $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Então, uma aproximação da massa da parte da barra entre x_{i-1} e x_i é dada por

$$\Delta m_i = \rho(c_i)\, \Delta x_i$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i = \sum_{i=1}^{n} \rho(c_i)\, \Delta x_i \tag{4}$$

constitui uma aproximação da massa total da barra.

Podemos observar que à medida que n cresce muito e cada $\Delta x_i \to 0$, a soma (*4*) se aproxima do que intuitivamente entendemos como a massa total da barra.

Assim, como (*4*) é uma soma de Riemann da função contínua $\rho(x)$, podemos definir a massa total da barra como

$$\boxed{m = \int_a^b \rho(x)\, dx} \tag{5}$$

Para encontrarmos o centro de massa da barra, precisamos primeiro encontrar o momento da barra em relação à origem.

Procedendo de acordo com as hipóteses e notações anteriores, obtemos que $c_i\, \Delta m_i$ é uma aproximação do momento em relação à origem, da parte da barra que está entre x_{i-1} e x_i e que

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\, \Delta m_i = \sum_{i=1}^{n} c_i\, \rho(c_i)\, \Delta x_i \tag{6}$$

é uma aproximação do momento da barra em relação à origem.

Como a soma (*6*) é uma soma de Riemann da função contínua $x\ \rho(x)$, podemos definir o momento da barra em relação à origem como

$$\boxed{M_0 = \int_a^b x\ \rho(x)\ dx.} \qquad (7)$$

Então, estendendo a expressão (*3*) para a barra, obtemos o seu centro de massa $\bar{x}$, que é dado por

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{m} \int_a^b x\ \rho(x)\ dx.} \qquad (8)$$

8.12.1 Exemplos

(*i*) Usando (*8*), verificar que o centro de massa de uma barra homogênea está no seu ponto médio.

Solução. Seja l o comprimento da barra e ρ a sua densidade linear. Localizando a barra sobre o eixo dos x com extremidades nos pontos a e b, temos

$$\begin{aligned} m &= \int_a^b \rho\ dx \\ &= \rho \int_a^b dx \\ &= \rho\ (b - a) \\ &= \rho l \text{ unidades de massa;} \end{aligned}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \int_a^b x\, \rho\, dx$$

$$= \frac{\rho}{\rho\, l} \int_a^b x\, dx$$

$$= \frac{1}{l} \frac{x^2}{2} \Bigg|_a^b$$

$$= \frac{1}{2l} (b^2 - a^2)$$

$$= \frac{1}{2l} (b - a)(b + a) .$$

Como $b - a = l$, temos $\bar{x} = \dfrac{b + a}{2}$, ou seja, $\bar{x}$ está sobre o ponto médio da barra.

Neste exemplo, fica claro que a localização do centro de massa em relação à barra não depende da posição da barra em relação à origem. Na prática, podemos sempre escolher a posição mais conveniente de forma a facilitar os cálculos.

(*ii*) Uma barra mede 6m de comprimento. A densidade linear num ponto qualquer da barra é proporcional à distância desse ponto a um ponto q, que está sobre o prolongamento da linha da barra, a uma distância de 3m da mesma. Sabendo que na extremidade mais próxima a q, a densidade linear é 1 kg/m, determinar a massa e o centro de massa da barra.

Solução. A Figura 8.73 mostra a barra localizada sobre o eixo dos x.

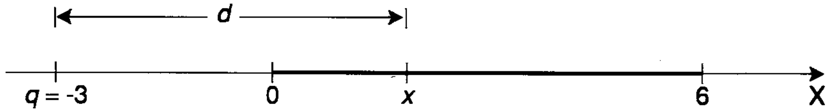


Figura 8-73

A distância de um ponto x da barra até q é dada por

$$\begin{aligned} d &= x-(-3) \\ &= x+3. \end{aligned}$$

Como a densidade é proporcional à distância d, temos

$$\rho(x) = k(x+3),$$

onde k é uma constante de proporcionalidade.

Como $\rho(0) = 1$ kg/m, substituindo na expressão anterior, vem

$$1 = k(0+3) \quad \text{ou}$$

$$k = \frac{1}{3}.$$

Portanto,

$$\rho(x) = \frac{1}{3}(x+3), \forall x \in [0, 6].$$

A massa da barra é dada por

$$\begin{aligned} m &= \int_0^6 \rho(x)\, dx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^6 (x+3)\, dx \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)\Bigg|_0^6 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}(18 + 18)$$

$$= 12 \text{ kg}.$$

O centro de massa $\bar{x}$ é dado por

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_0^6 x\,\rho(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{12}\int_0^6 x \cdot \frac{1}{3}(x + 3)\,dx$$

$$= \frac{1}{36}\left[\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]\Bigg|_0^6$$

$$= \frac{1}{36}[72 + 54]$$

$$= 3{,}5.$$

Portanto, o centro de massa está localizado sobre a barra, a uma distância de 3,5m da extremidade mais próxima a q.

(*iii*) Determinar o centro de massa de uma barra de 5m de comprimento, sabendo que num ponto q, que dista 1m de uma das extremidades, a densidade é 2 kg/m e que nos demais pontos ela é dada por $(2 + d)$ kg/m, onde d é a distância até o ponto q.

Solução. Localizamos a barra sobre o eixo dos x como mostra a Figura 8.74.

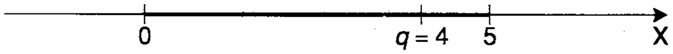


Figura 8-74

Então, podemos expressar a densidade da barra pela função

$$\rho(x) = \begin{cases} 2, & x = 4 \\ 2 + (4 - x) = 6 - x, & 0 \le x < 4 \\ 2 + (x - 4) = x - 2, & 4 < x \le 5. \end{cases}$$

A massa da barra é dada por

$$\begin{aligned} m &= \int_0^5 \rho(x)\, dx \\ &= \int_0^4 (6 - x)\, dx + \int_4^5 (x - 2)\, dx \\ &= \left(6x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^4 + \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_4^5 \\ &= (24 - 8) + \left(\frac{25}{2} - 10 - 8 + 8\right) \\ &= \frac{37}{2}\ \text{kg}. \end{aligned}$$

O centro de massa é dado por

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{m} \int_0^5 x\, \rho(x)\, dx \\ &= \frac{2}{37}\left[\int_0^4 x\,(6 - x)\, dx + \int_4^5 x\,(x - 2)\, dx\right] \\ &= \frac{2}{37}\left[\left(3x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 + \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_4^5\right] \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{37}\left[48 - \frac{64}{3} + \frac{125}{3} - 25 - \frac{64}{3} + 16\right]$$

$$= \frac{76}{37}$$

$$\cong 2{,}05\,.$$

Portanto, o centro de massa está sobre a barra, a uma distância aproximada de 2,05m da extremidade mais distante ao ponto q dado.

8.13 MOMENTO DE INÉRCIA DE UMA BARRA

Inicialmente, vamos descrever o significado intuitivo do momento de inércia. Para isso, vamos considerar uma barra constituída por partes iguais, de madeira e aço, como mostra a Figura 8.75.

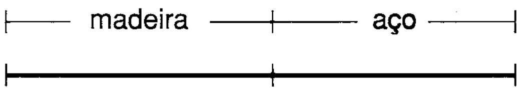


Figura 8-75

Suponhamos que a barra possa girar livremente em torno de um eixo perpendicular L, que passa por uma de suas extremidades. Se aplicarmos uma força F na outra extremidade da barra, como mostra a Figura 8.76, faremos com que ela gire em torno do eixo L.

Se o eixo passar pela extremidade de madeira, obteremos uma determinada aceleração angular. Se trocarmos as posições, isto é, se o eixo de rotação passar pela extremidade de aço, aplicando a mesma força F na extremidade de madeira, teremos uma aceleração angular muito maior que a anterior.

Além disso, se mudarmos o ponto de aplicação da força para uma posição mais próxima do eixo L, em ambos os casos, a aceleração angular diminuirá. Na prática, podemos observar isso quando abrimos ou fechamos uma porta.

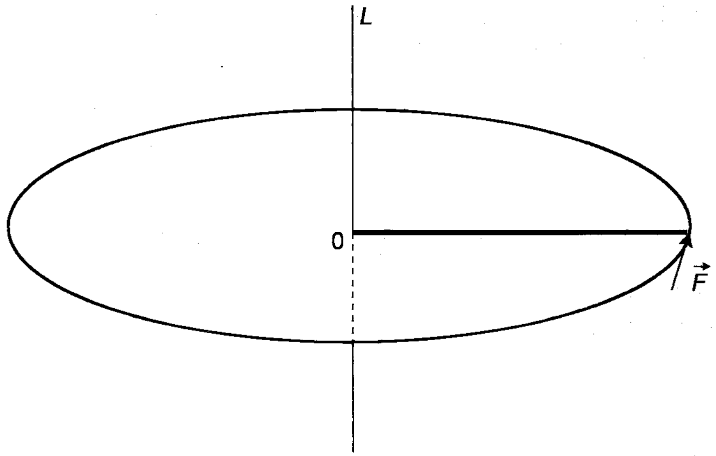


Figura 8-76

Vemos assim que, para uma mesma força, a aceleração angular depende da distância e da distribuição da massa da barra em relação ao eixo de rotação.

Vamos agora, fazer uma analogia com o movimento de translação. Observando a Segunda Lei de Newton, que pode ser expressa como

$$F = m \cdot a \quad \text{ou} \quad a = \frac{1}{m} F \, ,$$

vemos que a massa pode ser interpretada como uma medida da capacidade do corpo de resistir à aceleração. Se a força é constante, quanto maior a massa, menor será a aceleração.

De acordo com nossas considerações anteriores, no movimento de rotação, a grandeza análoga à massa no movimento de translação é uma grandeza que depende da distância de cada ponto do corpo ao eixo de rotação e da distribuição da massa do corpo, em relação a esse eixo. Essa grandeza é chamada inércia de rotação ou *momento de inércia* e pode ser interpretada como uma medida da capacidade do corpo de resistir à aceleração angular em torno de um eixo L.

8.13.1 Definição. O momento de inércia de uma partícula de massa m_i, em relação a um eixo L, é definido como

$$I_L = m_i\, d_i^2,$$

onde d_i é a distância perpendicular da partícula ao eixo L.

Se temos um sistema de n partículas, o momento de inércia do sistema em relação a L é definido como a soma dos momentos de inércia, em relação a L, de todas as partículas, isto é,

$$I_L = \sum_{i=1}^{n} m_i\, d_i^2 .$$

Como fizemos para o centro de massa na seção anterior, vamos agora estender a definição 8.13.1, para a barra horizontal rígida da Figura 8.77.

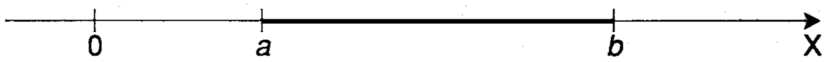


Figura 8-77

Suponhamos que a densidade linear da barra é dada por uma função contínua $\rho(x)$, $x \in [a, b]$.

Seja P uma partição de $[a, b]$, dada pelos pontos

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b.$$

Sejam c_i um ponto qualquer no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ e $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Então, uma aproximação do momento de inércia em relação a um eixo L, da parte da barra entre x_{i-1} e x_i, é dada por

$$d^2(c_i)\,\Delta m_i = d^2(c_i)\,\rho(c_i)\,\Delta x_i ,$$

onde $d(c_i)$ é a distância do ponto c_i ao eixo L (ver Figura 8.78).

A soma

$$\sum_{i=1}^{n} d^2(c_i)\ \Delta m_i = \sum_{i=1}^{n} d^2(c_i)\ \rho(c_i)\ \Delta x_i \tag{1}$$

constitui uma aproximação do momento de inércia da barra, em relação ao eixo L.

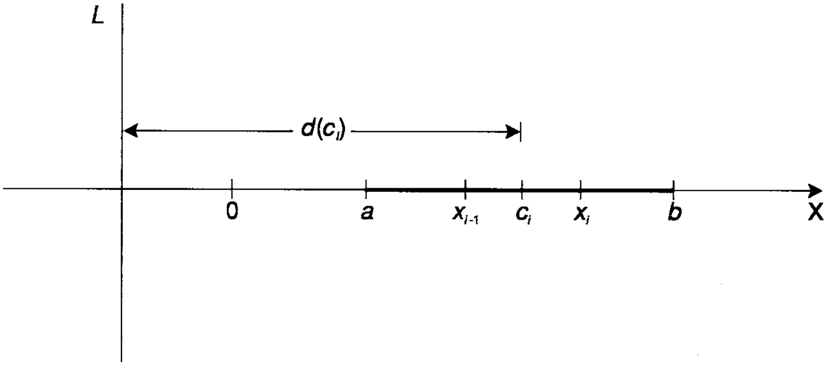


Figura 8-78

Como (*1*) é uma soma de Riemann da função contínua $d^2(x)\ \rho(x)$, podemos definir o momento de inércia da barra, em relação ao eixo L, por

$$\boxed{I_L = \int_a^b d^2(x)\ \rho(x)\ dx\ .} \tag{2}$$

8.13.2 Exemplos

(*i*) Determinar o momento de inércia da barra do exemplo 8.12.1(*ii*), em relação a um eixo perpendicular L, que passa por $x = -3$ (ver Figura 8.73).

Solução. No exemplo 8.12.1(*ii*), vimos que a densidade linear da barra é dada por

$$\rho(x) = \frac{1}{3}(x + 3), \forall x \in [a, b]$$

e que a distância de um ponto qualquer x da barra até o eixo L, é dada por

$$d(x) = x + 3.$$

Portanto, usando a fórmula (2), vem

$$I_L = \int_0^6 (x + 3)^2 \frac{1}{3}(x + 3)\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^6 (x + 3)^3\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\frac{(x + 3)^4}{4}\Bigg|_0^6$$

$$= \frac{1}{12}[9^4 - 3^4]$$

$$= 540 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

(*ii*) Uma barra de 4m de comprimento, é formada por dois materiais A e B, de densidades constantes, como mostra a Figura 8.79. Supondo que as densidades de A e B são dadas por $\rho_1 = 1$ kg/m e $\rho_2 = 2$ kg/m, respectivamente, determinar:

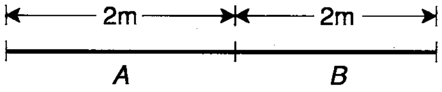


Figura 8-79

(*a*) O momento de inércia da barra em relação a um eixo perpendicular L_1, que passa na extremidade da barra feita pelo material A.

(*b*) O momento de inércia da barra em relação a um eixo perpendicular L_2, que passa na extremidade oposta da barra.

Solução.

(*a*) A Figura 8.80 mostra a barra localizada sobre o eixo dos x e o eixo de rotação L_1.

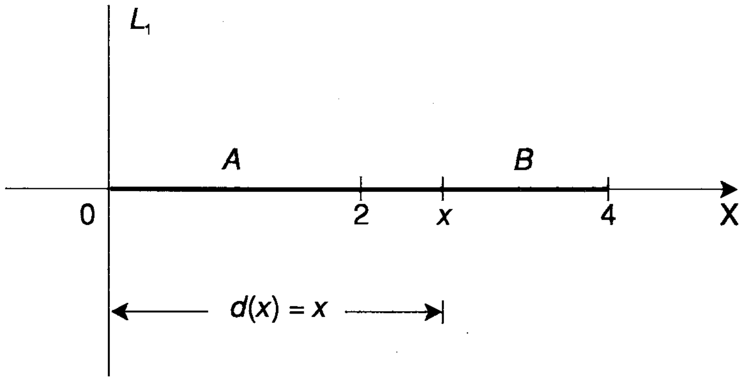


Figura 8-80

Usando a fórmula (2), temos

$$I_{L_1} = \int_0^2 x^2 \cdot 1\, dx + \int_2^4 x^2 \cdot 2\, dx.$$

$$= \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 + 2\left.\frac{x^3}{3}\right|_2^4$$

$$= 40 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

(b) A Figura 8.81 mostra a barra localizada sobre o eixo dos x e o eixo de rotação L_2.

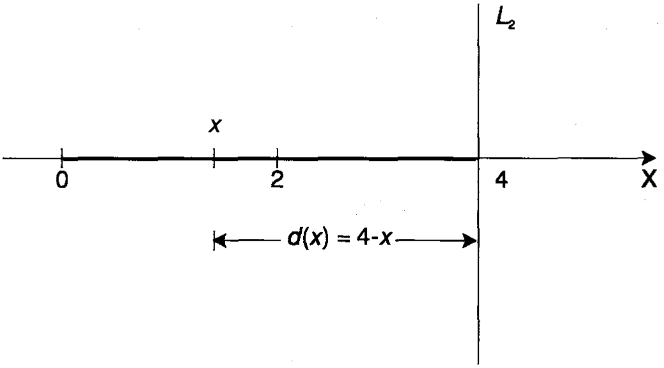


Figura 8-81

Usando a fórmula (2), temos

$$I_{L_2} = \int_0^2 (4-x)^2 \cdot 1\,dx + \int_2^4 (4-x)^2 \cdot 2\,dx$$

$$= \left.\frac{-(4-x)^3}{3}\right|_0^2 - 2\left.\frac{(4-x)^3}{3}\right|_2^4$$

$$= -\frac{8}{3} + \frac{64}{3} + \frac{16}{3}$$

$$= 24\,\text{kg}\cdot\text{m}^2.$$

Observamos que estes resultados confirmam nossa percepção intuitiva, discutida na parte inicial desta seção. No caso do item (a), a barra possui uma capacidade maior de resistir à rotação em torno de L, porque sua parte mais densa está mais afastada de L. Assim, para obtermos uma mesma aceleração angular, precisamos aplicar uma força maior que no caso do item (b).

Os resultados obtidos também nos mostram como o momento de inércia de um corpo depende do eixo de rotação considerado.

8.14 TRABALHO

Na Física, o conceito de força pode ser usado para descrever o ato de empurrar ou puxar um objeto. Por exemplo, necessitamos de uma força para

- levantar um objeto do solo;
- empurrar um automóvel.

Intuitivamente, sabemos que a força necessária para levantar um objeto do solo, é uma *força constante*, isto é, sua intensidade não varia enquanto está aplicada ao objeto. No entanto, para empurrar um automóvel é necessário uma *força variável*, pois no início do movimento, aplicamos uma força maior do que aquela aplicada quando o carro está em movimento.

Se aplicamos uma força F a um objeto, fazendo-o deslocar-se a uma determinada distância d, na direção da força, podemos determinar o trabalho W realizado por F sobre o objeto.

Se a força é constante, definimos W por

$$W = F \cdot d.$$

Se a força é variável, definimos W, usando a integral definida.

8.14.1 Trabalho realizado por uma força variável.

Suponhamos que um objeto se desloca sobre um eixo L e esteja sujeito a uma força variável F. Sem perda de generalidade, seja L o eixo dos x. Suponhamos que $F = F(x)$ é uma função contínua em $[a, b]$.

Queremos definir o trabalho realizado pela força F sobre o objeto, quando este se desloca de $x = a$ até $x = b$, com $a < b$.

Consideremos uma partição P de $[a, b]$, dada por

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b.$$

Sejam c_i um ponto qualquer do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ e $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Então, uma aproximação do trabalho realizado pela força $F = F(x)$ sobre o objeto, quando este se desloca no i-ésimo intervalo, é dada por

$$W_i = F(c_i)\,\Delta x_i \ .$$

Assim, uma aproximação do trabalho realizado pela força $F = F(x)$ sobre o objeto, quando este se desloca de a até b é dada por

$$\sum_{i=1}^{n} F(c_i)\,\Delta x_i \,. \qquad (1)$$

Podemos observar que à medida que n cresce muito e cada $\Delta x_i \to 0$, a soma (*1*) se aproxima do que intuitivamente entendemos como o trabalho total W, realizado pela força $F(x)$ sobre o objeto, quando este se desloca de a até b.

Como (*1*) é uma soma de Riemann da função contínua $F(x)$, podemos definir W por

$$\boxed{W = \int_a^b F(x)\, dx \,.} \qquad (2)$$

8.14.2 Exemplo. Uma criança rolando uma pedra, utiliza uma força de 120 + 25 sen x Newtons sobre ela, quando esta rola x metros. Quanto trabalho deve a criança realizar, para fazer a pedra rolar 2 metros?

Solução. A Figura 8.82 ilustra a situação. No ponto O inicia-se o movimento. Queremos calcular o trabalho W, realizado pela força $F(x) = 120 + 25$ sen x, sobre a pedra, quando esta se desloca de 0 até 2.

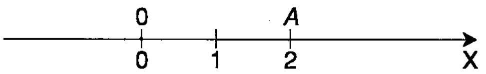


Figura 8-82

Usando (2), temos

$$W = \int_0^2 (120 + 25 \operatorname{sen} x)\, dx$$

$$= (120x - 25 \cos x) \Big|_0^2$$

$$= 120 \cdot 2 - 25 \cos 2 - 120 \cdot 0 + 25 \cos 0$$

$$= 240 - 25 \cos 2 + 25$$

$$= (265 - 25 \cos 2)\ \text{N} \cdot \text{m. (Newtons} \cdot \text{metros = Joules).}$$

8.14.3 Trabalho Resultante da Distensão e Compressão de uma Mola.

A força $F(x)$ necessária para distender uma mola x unidades além de seu comprimento natural é dada por

$$F(x) = kx, \tag{3}$$

onde k é uma constante, chamada *constante da mola* (ver Figura 8.83).

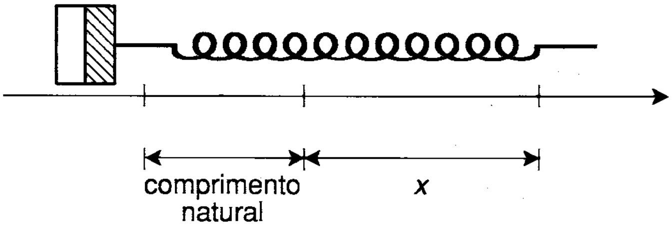


Figura 8-83

As molas reais obedecem à equação (*3*), que é conhecida como *Lei de Hooke*.

Colocamos a mola ao longo do eixo dos x com a origem no ponto onde começa o esticamento (ver Figura 8.84).

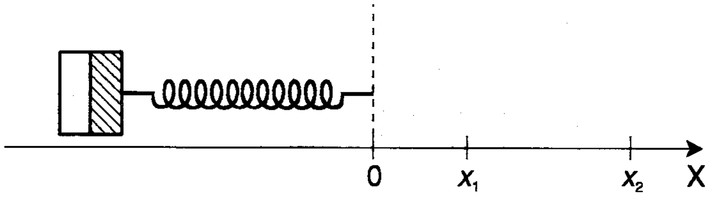


Figura 8-84

O trabalho realizado para que a mola se estenda de x_1 até x_2 é dado por

$$W = \int_{x_1}^{x_2} kx\ dx. \tag{4}$$

Observamos que esta fórmula também pode ser usada para a compressão de molas.

8.14.4 Exemplos

(*i*) Uma mola tem um comprimento natural de 0,5 m. Uma força de 4N é exigida para conservar a mola esticada 0,6 m. Calcular o trabalho realizado para que a mola se estenda de seu comprimento natural até um comprimento de 1,2 m.

Solução. Colocamos a mola ao longo do eixo dos x como mostra a Figura 8.85.

Inicialmente, precisamos encontrar a constante da mola. Pela Lei de Hooke, vem

$$F(x) = kx.$$

Como $F(0{,}6) = 4$, temos

$$k \cdot 0{,}6 = 4$$

$$k = \frac{4}{0{,}6}$$

$$k = \frac{20}{3}.$$

Logo, $F(x) = \dfrac{20}{3}x$.

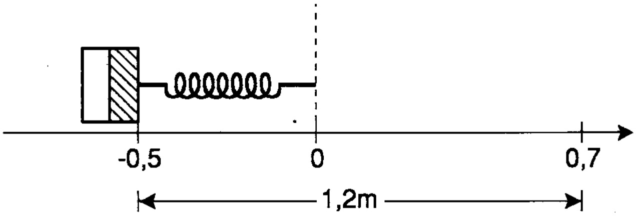


Figura 8-85

Portanto, usando (*4*) e visualizando os limites de integração na Figura 8.85, temos

$$W = \int_0^{0,7} \frac{20}{3} x\,dx$$

$$= \frac{20}{3} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,7}$$

$$= \frac{10}{3} (0,7)^2$$

$$= \frac{49}{30} J \text{ (Joules).}$$

(*ii*) A constante da mola de um batente numa estação de carga é de 26×10^4 N/m. Achar o trabalho efetuado ao se comprimir a mola de 10 cm.

A Figura 8.86 ilustra este exemplo. Temos que $F(x) = 26 \times 10^4\, x$.

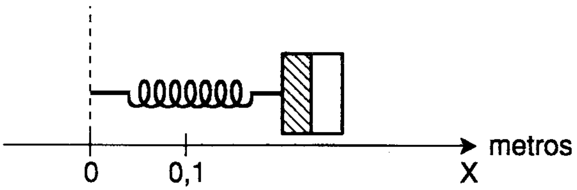


Figura 8-86

Usando (*4*), vem

$$W = \int_0^{0,1} 26 \times 10^4\, x\, dx$$

$$= 26 \times 10^4 \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{0,1}$$

$$= 13 \cdot 10^4 \cdot (0,1)^2$$

$$= 1300\ \text{J}.$$

Podemos usar a integral para calcular Trabalho em outras situações práticas. Basta identificar um sistema de coordenadas adequado e definir a força variável para a situação considerada.

Os exemplos seguintes mostram o caso de esvaziamento de tanques pela parte superior.

8.14.5 Exemplos

(*i*) Um tanque tem a forma de um cilindro circular reto de raio igual a 4m e altura 8m. Supondo que esteja cheio de água (o peso da água por m^3 é 9807 Newtons), achar o trabalho efetuado, para esvaziar o tanque pela parte superior, considerando que a água seja deslocada por meio de um êmbolo, partindo da base do tanque.

Solução. A Figura 8.87 mostra o tanque, com o êmbolo a y metros do fundo.

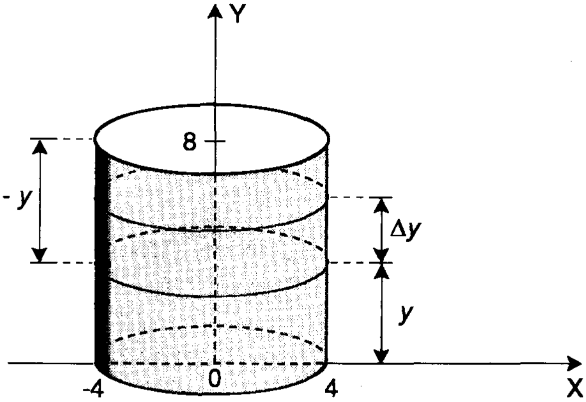


Figura 8-87

A força elevatória é igual ao peso da água sobre o êmbolo. Como o volume de água acima do êmbolo é dado por $\pi r^2 (8 - y)$, temos

$$F(y) = \pi r^2 (8 - y) \cdot 9807$$

ou,

$$\begin{aligned} F(y) &= \pi \cdot 4^2 \cdot (8 - y) \cdot 9807 \\ &= 156\,912\, \pi\, (8 - y). \end{aligned}$$

Portanto, o trabalho necessário para esvaziar o tanque é

$$\begin{aligned} W &= \int_0^8 156\,912\, \pi\ (8 - y)\ dy \\ &= 156\,912\, \pi \int_0^8 (8 - y)\ dy \end{aligned}$$

$$= \quad 156\,912\,\pi \left(8y - \frac{y^2}{2}\right) \Bigg|_0^8$$

$$= \quad 156\,912\,\pi \left(8 \cdot 8 - \frac{8^2}{2}\right)$$

$$= \quad 5021184\,\pi\,\text{J}.$$

(*ii*) Um tanque tem a forma do cone circular reto, de altura 10m e raio da base 5m. Se o tanque está cheio de água, encontrar o trabalho realizado para bombear a água pelo topo do tanque.

Solução. Seja y a distância, em metros, até o ponto de baixo do tanque (ver Figura 8.88).

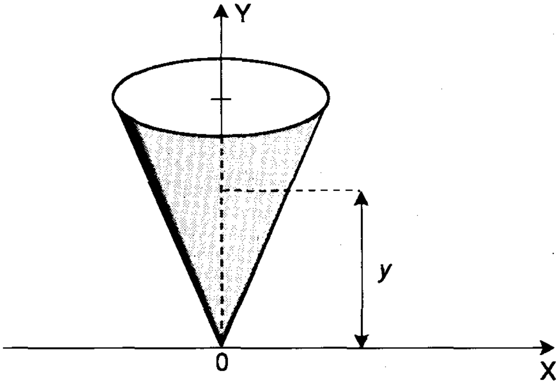


Figura 8-88

Consideremos uma partição de P de [0, 10] dada por

$$0 = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{j-1} < y_j < \ldots < y_n = 10.$$

Os planos horizontais nas alturas $y = y_j$, $j = 0, 1, \ldots, n$, dividem o tanque em n fatias.

Vamos aproximar a j-ésima fatia por um disco de raio igual ao raio do tanque na altura y_j e espessura igual a $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ (ver Figura 8.89).

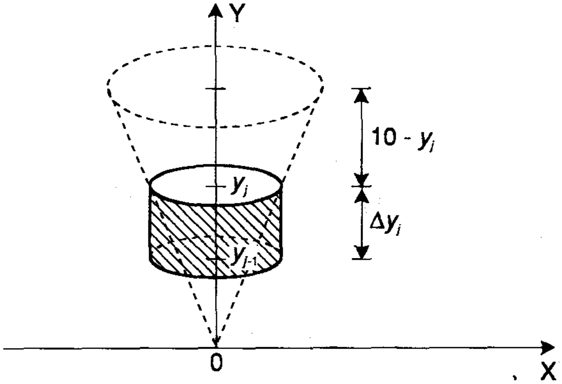


Figura 8-89

Como o cone intercepta o plano xy segundo a reta que passa por (0, 0) e (5, 10) (ver Figura 8.90), temos que o raio do j-ésimo disco é dado por $\frac{1}{2}\, y_j$.

O j-ésimo disco tem volume

$$\pi \left(\frac{y_j}{2}\right)^2 \Delta y_j \ m^3$$

e o peso da água correspondente é

$$9807\, \pi \left(\frac{y_j}{2}\right)^2 \Delta y_j \ \text{kg}\,.$$

O topo deste disco está a $10 - y_j$ metros do topo do tanque. Assim, necessitamos

$$9807\, \pi \left(\frac{y_j}{2}\right)^2 \Delta y_j (10 - y_j) \ \ \text{m} \cdot \text{kg}$$

de trabalho para bombear a água até o topo.

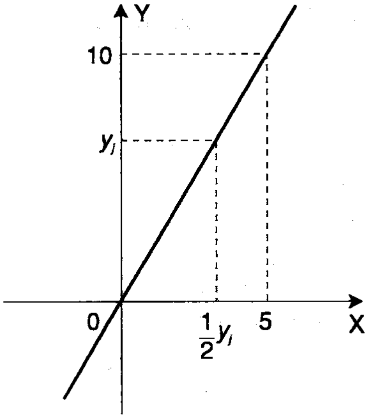


Figura 8-90

A soma

$$\sum_{j=1}^{n} 9807\,\pi \left(\frac{y_j}{2}\right)^2 (10 - y_j)\ \Delta\ y_j$$

é uma solução aproximada.

A quantidade exata de trabalho para bombear toda a água até o topo do tanque é

$$W = \int_0^{10} 9807\,\pi \left(\frac{y}{2}\right)^2 (10 - y)\ dy$$

$$= \frac{9807\,\pi}{4} \int_0^{10} y^2\ (10 - y)\ dy$$

$$= 2451{,}75\,\pi \int_0^{10} (10y^2 - y^3)\ dy$$

$$= 2451{,}75\,\pi \left(10\ \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^{10}$$

$$= 2451{,}75\,\pi \left(10 \cdot \frac{10^3}{3} - \frac{10^4}{4}\right)$$

$$= 2043125\,\pi\,\text{J}.$$

8.15 PRESSÃO DE LÍQUIDOS

Podemos também aplicar a integral definida para encontrar a força causada pela pressão de um líquido sobre uma chapa submersa no líquido, ou sobre um lado do recipiente que o contém.

Da Física, sabemos que, se um recipiente fechado, como um balão, está cheio de líquido e se forças externas, como a gravidade, não são consideradas, então a força exercida pelo líquido sobre uma chapa plana colocada dentro do recipiente, é independente da posição da chapa. A força tem a direção perpendicular à chapa e é proporcional a sua área.

A constante de proporcionalidade entre a força exercida sobre a chapa e sua área é chamada *pressão do líquido*, e tem como unidade de medida a unidade de força por unidade de área. Por exemplo,

$$P = \frac{F}{A} \text{ Newtons/m}^2.$$

No caso de uma piscina cheia de água a pressão é causada pela gravidade e aumenta com a profundidade da água.

Para um líquido qualquer, a pressão P exercida pelo líquido num ponto sob a superfície do mesmo, a uma profundidade h, é dada por

$$P = w\,h,$$

onde w é o peso do líquido por unidade de volume.

Como a pressão varia com a profundidade, a força total numa região plana não horizontal, que está submersa numa porção de líquido, é dada por uma integral.

A seguir, vamos determinar a força total sobre uma chapa plana, submersa em um líquido, verticalmente, como mostra a Figura 8.91.

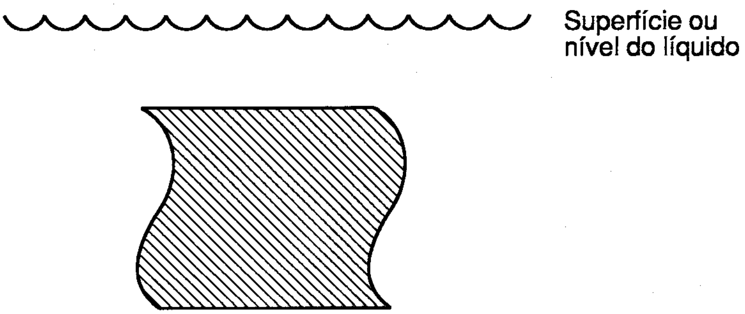


Figura 8-91

Escolhendo o sistema de eixos coordenados adequadamente, podemos supor que a chapa tem a forma da região do plano xy limitada por $y = c$, $y = d$, $x = f(y)$ e $x = g(y)$, onde f e g são funções contínuas em $[c, d]$ e $f(y) \geq g(y)$, $\forall\ y \in [c, d]$ (ver Figura 8.92).

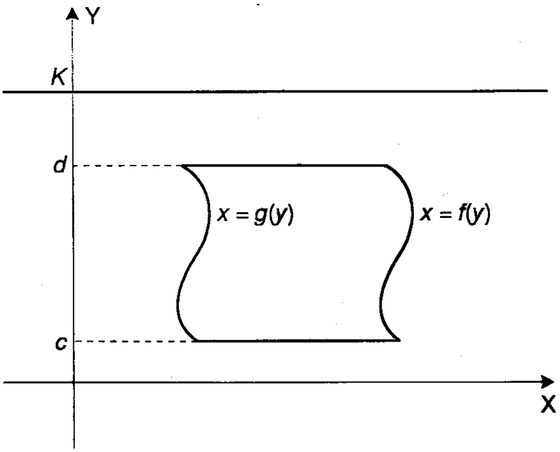


Figura 8-92

Vamos supor que o nível do líquido contenha a reta $y = k$.

Seja P uma partição de $[c, d]$ dada por

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{j-1} < y_j < \ldots < y_n = d.$$

Seja s_j um ponto qualquer do intervalo $[y_{j-1}, y_j]$ e $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$.

A chapa pode ser aproximada por n retângulos de largura

$$L_j = f(s_j) - g(s_j)$$

e altura

$$H_j = \Delta y_j \text{ (ver Figura 8.93).}$$

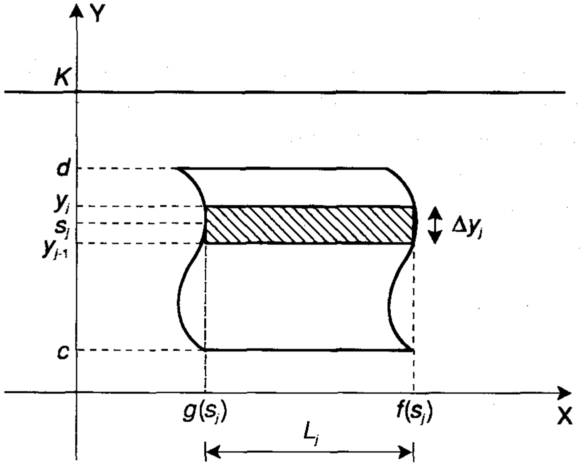


Figura 8-93

A área do j-ésimo retângulo é dada por

$$\begin{aligned} A_j &= L_j \cdot H_j \\ &= [f(s_j) - g(s_j)]\, \Delta y_j . \end{aligned}$$

Se Δy_j é pequeno, então todos os pontos do retângulo estão aproximadamente à mesma distância, $k - s_j$, do nível do líquido. Logo, a pressão em qualquer ponto do retângulo pode ser aproximada por

$$w \cdot (k - s_j).$$

A força no j-ésimo retângulo é aproximadamente igual a

$$w(k - s_j)[f(s_j) - g(s_j)]\,\Delta y_j .$$

A força total sobre a chapa é aproximadamente igual a

$$\sum_{j=1}^{n} w(k - s_j)[f(s_j) - g(s_j)]\,\Delta y_j . \qquad (1)$$

Podemos observar que à medida que n cresce e cada $\Delta y_j \to 0$, a soma (1) se aproxima do que intuitivamente entendemos como a força total sobre a chapa. Como (1) é uma soma de Riemann da função contínua

$$w(k - y)[f(y) - g(y)],$$

podemos definir a força total sobre a chapa como

$$\boxed{F = \int_c^d w\,(k - y)\,[f(y) - g(y)]\,dy .} \qquad (2)$$

8.15.1 Exemplos

(*i*) Um depósito de água tem extremidades verticais com a forma de um trapézio isósceles de base menor igual a 4m, base maior 12m e altura 8m. Determinar a força total sobre uma extremidade, quando o depósito está cheio de água.

Solução. A Figura 8.94 ilustra o trapézio num sistema de coordenadas cartesianas.

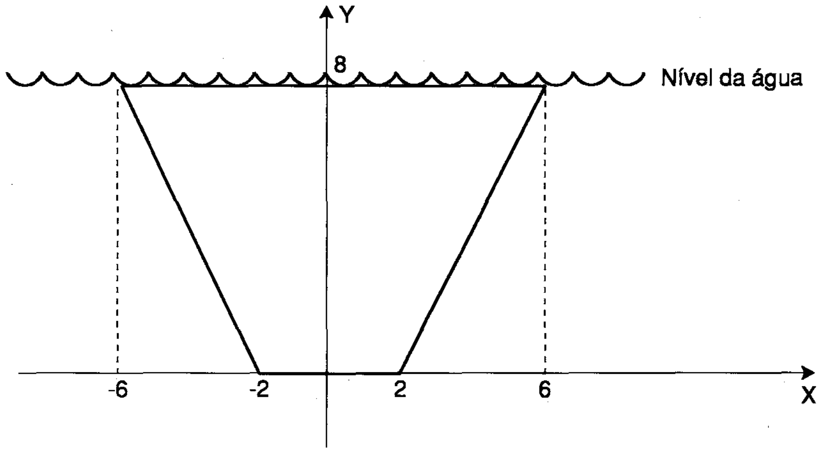


Figura 8-94

Como a figura apresenta simetria em relação ao eixo dos y, vamos analisar só a região do primeiro quadrante. Esta região está delimitada por

$$y = 0\,,\ y = 8\,,\ x = 0 \quad \text{e} \quad x = \frac{y+4}{2}\,.$$

O nível da água contém a reta $y = 8$.

O peso da água por metro cúbico é conhecido, da Física, como $w = 9807$ Newtons.

Usando (2), temos

$$F = 2 \int_0^8 9807\,(8 - y) \cdot \frac{y+4}{2}\,dy$$

$$= 9807 \int_0^8 (8 - y)\,(y + 4)\,dy$$

$$= 9807 \int_0^8 (32 + 4y - y^2)\, dy$$

$$= 9807 \left(32y + 4\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^8$$

$$= 9807 \left(32 \cdot 8 + 2 \cdot 8^2 - \frac{8^3}{3}\right)$$

$$= 2092225{,}38 \text{ Newtons.}$$

(*ii*) Uma chapa semicircular de 0,2m de raio acha-se submersa verticalmente num líquido, como mostra a Figura 8.95. Determinar a força exercida sobre um lado da chapa, sabendo-se que o líquido pesa 10^4 N por m^3.

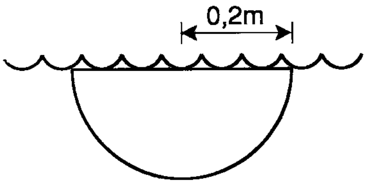


Figura 8-95

Solução. A Figura 8.96 mostra a chapa colocada num sistema de coordenadas cartesianas.

Devido à simetria em relação ao eixo dos y, vamos considerar a região delimitada por $y = -0{,}2$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = \sqrt{0{,}04 - y^2}$.

O nível da água contém a reta $y = 0$.

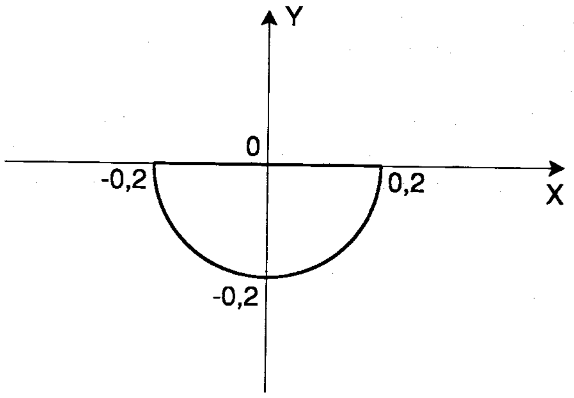


Figura 8-96

Usando (2), temos

$$F = 2\int_{-0,2}^{0} 10^4\,(0 - y)\,\sqrt{0,04 - y^2}\,dy$$

$$= 2\cdot 10^4 \int_{-0,2}^{0} -y\,\sqrt{0,04 - y^2}\,dy$$

$$= 2\cdot 10^4 \left(\frac{1}{2}\,\frac{(0,04 - y^2)^{3/2}}{3/2}\right)\Bigg|_{-0,2}^{0}$$

$$= \frac{20000}{3}\cdot 0,04^{3/2}$$

$$\cong 53,33 \text{ Newtons.}$$

8.16 EXERCÍCIOS

1. Encontrar a massa total e o centro de massa de uma barra de 12 cm de comprimento, se a densidade linear da barra num ponto P, que dista x cm da extremidade esquerda, é $(5x + 7)$ kg/cm.

2. Encontrar a massa total e o centro de massa de uma barra de comprimento 3m, se a densidade linear da barra num ponto situado a x m do extremo esquerdo é $(5x^2 + 3)$ kg/m.

3. Calcular a massa total e o centro de massa de uma barra de 5m de comprimento, sabendo que a densidade linear num ponto é uma função do 1º grau da distância total deste ponto ao extremo direito da barra. A densidade linear no extremo direito é 5 kg/m e no meio da barra é 2 kg/m.

4. Uma barra horizontal está localizada sobre o eixo dos x, como mostra a Figura 8.97.

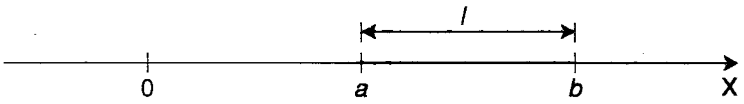


Figura 8-97

Se a densidade linear num ponto qualquer da barra é proporcional à distância deste ponto até a origem, determinar o valor da constante de proporcionalidade, de modo que a massa da barra seja $m = \frac{b + a}{2}$ u.m..

5. O comprimento de uma barra é 2m e a densidade linear no extremo direito é 1 kg/m. A densidade linear num ponto varia diretamente com a segunda potência da distância do ponto ao extremo esquerdo. Calcular a massa total e o centro de massa da barra.

6. Determinar o momento de inércia de uma barra homogênea de 3m de comprimento, em relação a um eixo perpendicular, que:

(*a*) passa no ponto médio da barra; (*b*) passa por uma das extremidades da barra.

Considerar a densidade linear da barra igual a 0,8 kg/m.

7. Uma barra horizontal mede 8m de comprimento. No seu ponto médio a densidade linear é 0,8 kg/m e cresce proporcionalmente com o quadrado da distância até este ponto. Se numa das extremidades a densidade é 16,8 kg/m, determinar a massa e o centro de massa da barra.

8. Determinar o momento de inércia da barra do exercício 7 em relação a um eixo perpendicular que:

(*a*) passa no ponto médio da barra; (*b*) passa por uma das extremidades da barra.

9. Achar o momento de inércia da barra dos exercícios 1 e 3 para um eixo perpendicular que:

(*a*) passa pelo extremo direito;

(*b*) passa pelo extremo esquerdo;

(*c*) passa no ponto médio da barra.

10. Uma barra localizada sobre o eixo dos x tem extremos $x = 0$ e $x = 4$. Se a densidade linear é dada por $\rho(x) = \dfrac{1}{x+1}$, determinar a massa e o centro de massa da barra.

11. Determinar o momento de inércia da barra do exercício 10 em relação a um eixo perpendicular que passa no ponto $x = -1$.

12. Determinar a massa e o centro de massa de uma barra que está localizada sobre o eixo dos x, com extremos nos pontos $x = 0$ e $x = 1$. A densidade linear da barra é dada por $\rho(x) = e^x$.

13. Determinar o momento de inércia da barra do exercício 12 em relação a um eixo perpendicular que passa pela origem.

14. Uma barra homogênea mede 3m de comprimento. Se o seu momento de inércia em relação a um eixo perpendicular que passa por uma de suas extremidades é 22,5 kg.m^2, determinar a densidade linear da barra.

15. Uma mola tem comprimento natural de 10m. Sob um peso de 5N, ela se distende 3m.

(*a*) Determinar o trabalho realizado para distender a mola de seu comprimento natural até 25m.

(*b*) Determinar o trabalho realizado para distender a mola de 11m a 21m.

16. Uma força de 12N é necessária para comprimir uma mola de um comprimento natural de 8m para um comprimento de 7m. Encontrar o trabalho realizado para comprimir a mola de seu comprimento natural para um comprimento de 2m.

17. Uma mola tem comprimento natural de 12m. Para comprimi-la de seu comprimento natural até 9m, usamos uma força de 500N. Determinar o trabalho realizado ao comprimir a mola de seu comprimento natural até 5m.

18. Um balde pesa 5N e contém argila cujo peso é 30N. O balde está no extremo inferior de uma corrente de 50m de comprimento, que pesa 5N e está no fundo de um poço. Encontrar o trabalho necessário para suspender o balde até a borda do poço.

19. Um tanque cilíndrico circular reto de raio 1,2m e altura 3m está cheio de água. Achar o trabalho efetuado para esvaziar o tanque, pela parte superior.

20. Um tanque cilíndrico circular reto de 2m de diâmetro e 3m de profundidade está cheio de água e deve ser esvaziado pela parte superior. Determinar o trabalho necessário para esvaziar o tanque:

    (*a*) considerando que a água seja deslocada por meio de um êmbolo, partindo da base do tanque;

    (*b*) por bombeamento.

21. Um tanque tem a forma de um cone circular reto, de altura 20m e raio da base 102 cm. Se o tanque está cheio de água. encontrar o trabalho realizado para bombear a água pelo topo do tanque.

22. Um reservatório cheio de água é da forma de um paralelepípedo retângulo de 1,40m de profundidade, 4m de largura e 8m de comprimento. Encontrar o trabalho necessário para bombear a água do reservatório ao nível de 1m acima da superfície do mesmo.

23. Uma comporta vertical de uma represa tem a forma de um retângulo de base 4m e altura 2m. O lado superior da comporta está a 0,5m abaixo da superfície da água. Calcular a força total que essa comporta está sofrendo.

24. Um tanque tem a forma de um prisma quadrangular de altura 1m. Se o tanque está cheio de água e o seu lado da base mede 3m, determinar a força decorrente da pressão da água sobre um lado do tanque.

25. Uma chapa tem a forma da região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4$. Se esta chapa é imersa verticalmente na água, de tal forma que seu lado superior coincide com o nível d'água, determinar a força decorrente da pressão da água sobre um lado da chapa.

26. Uma chapa retangular de 1m de altura e 2m de largura é imersa verticalmente num líquido, sendo que sua base inferior está a 3m da superfície do líquido. Determinar a força total exercida sobre um lado da chapa, se o líquido pesa 4000 N/m^3.

Nos exercícios de 27 a 30, temos uma comporta de uma represa, colocada verticalmente, com a forma indicada. Calcular a força total contra a comporta.

27. Um retângulo com 30m de largura e 10m de altura; nível d'água: 2m acima da base da comporta.

28. Um trapézio isósceles com 30m de largura no topo, 20m de largura na base e 8m de altura; nível d'água: coincide com o topo da comporta.

29. Um triângulo isósceles com 16m de largura no topo e 10m de altura; nível d'água: coincide com o topo da comporta.

30. Um trapézio isósceles com 17m de largura no topo, 9m na base e 5m de altura; nível d'água: 2m acima da base da comporta.

31. O topo de um tanque tem 3m de comprimento e 2m de largura. As extremidades são triângulos equiláteros verticais, com um vértice apontando para baixo. Qual é a força total em uma extremidade do tanque, quando ele está cheio de um líquido que pesa 12000 Newtons por m^3?

32. Uma chapa é limitada pela curva $y = x^{2/3}$ e a reta $y = 1$, no plano xy, com o eixo dos y apontando para cima e suas escalas medidas em metros. A chapa está submersa em óleo, cujo peso é 9600 Newtons por m^3, com a reta $y = 1$ sobre a superfície do óleo. Qual é a força do óleo em cada lado da chapa?

33. Uma lâmina tem a forma de um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5m. A lâmina está imersa verticalmente num líquido, de tal forma que a hipotenusa coincide com o nível do líquido. Determinar a força exercida pelo líquido sobre um lado da lâmina, se o peso do líquido é $6500 N/m^3$.

MAKRON
Books

EDITORA DAUFSC

TABELAS

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

(*1*) $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

(*2*) $1 + \text{tg}^2 x = \sec^2 x$

(*3*) $1 + \text{cotg}^2 x = \text{cosec}^2 x$

(*4*) $\text{sen}^2 x = 1/2 \ (1 - \cos 2x)$

(*5*) $\cos^2 x = 1/2 \ (1 + \cos 2x)$

(*6*) $\text{sen}\, 2x = 2 \,\text{sen}\, x \, \cos x$

(*7*) $\text{sen}\, x \, \cos y = 1/2 \ [\text{sen}\, (x - y) + \text{sen}\, (x + y)]$

(*8*) $\text{sen}\, x \, \text{sen}\, y = 1/2 \ [\cos (x - y) - \cos (x + y)]$

(*9*) $\cos x \, \cos y = 1/2 \ [\cos (x - y) + \cos (x + y)]$

TABELA DE DERIVADAS

Nesta tabela u e v são funções deriváveis de x e c, α e a são constantes.

(*1*) $y = c \Rightarrow y' = 0$

(*2*) $y = x \Rightarrow y' = 1$

(*3*) $y = c \cdot u \Rightarrow y' = c \cdot u'$

(*4*) $y = u + v \Rightarrow y' = u' + v'$

(*5*) $y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$

(*6*) $y = \dfrac{u}{v} \Rightarrow y' = \dfrac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$

(*7*) $y = u^{\alpha}, (\alpha \neq 0) \Rightarrow y' = \alpha \cdot u^{\alpha - 1} \cdot u'$

(*8*) $y = a^u \; (a > 0, a \neq 1) \Rightarrow y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$

(*9*) $y = e^u \Rightarrow y' = e^u \cdot u'$

(*10*) $y = \log_a u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{u} \log_a e$

(*11*) $y = \ln u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{u}$

(*12*) $y = u^v \Rightarrow y' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v' \; (u > 0)$

(*13*) $y = \text{sen}\, u \Rightarrow y' = \cos u \cdot u'$

(*14*) $y = \cos u \Rightarrow y' = -\text{sen}\, u \cdot u'$

(*15*) $y = \text{tg}\, u \Rightarrow y' = \sec^2 u \cdot u'$

(*16*) $y = \text{cotg}\, u \Rightarrow y' = -\text{cosec}^2 u \cdot u'$

(*17*) $y = \sec u \Rightarrow y' = \sec u \cdot \text{tg}\, u \cdot u'$

(*18*) $y = \text{cosec } u \Rightarrow y' = -\text{cosec } u \cdot \text{cotg } u \cdot u'$

(*19*) $y = \text{arc sen } u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$

(*20*) $y = \text{arc cos } u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}$

(*21*) $y = \text{arc tg } u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{1 + u^2}$

(*22*) $y = \text{arc cotg } u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{1 + u^2}$

(*23*) $y = \text{arc sec } u, |u| \geq 1 \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{|u| \sqrt{u^2 - 1}}, \; |u| > 1$

(*24*) $y = \text{arc cosec } u, \; |u| \geq 1 \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{|u| \sqrt{u^2 - 1}}, \; |u| > 1$

(*25*) $y = \text{senh } u \Rightarrow y' = \cosh u \cdot u'$

(*26*) $y = \cosh u \Rightarrow y' = \text{senh } u \cdot u'$

(*27*) $y = \text{tgh } u \Rightarrow y' = \text{sech}^2\, u \cdot u'$

(*28*) $y = \text{cotgh } u \Rightarrow y' = -\text{cosech}^2\, u \cdot u'$

(*29*) $y = \text{sech } u \Rightarrow y' = -\text{sech } u \cdot \text{tgh } u \cdot u'$

(*30*) $y = \text{cosech } u \Rightarrow y' = -\text{cosech } u \cdot \text{cotgh } u \cdot u'$

(*31*) $y = \text{arg senh } u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{\sqrt{u^2 + 1}}$

(*32*) $y = \text{arg cosh } u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{\sqrt{u^2 - 1}}, \; u > 1$

(*33*) $y = \text{arg tgh } u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{1 - u^2}, \; |u| < 1$

(*34*) $y = \text{arg cotgh } u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{1 - u^2}$, $|u| > 1$

(*35*) $y = \text{arg sech } u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{u\sqrt{1 - u^2}}$, $0 < u < 1$

(*36*) $y = \text{arg cosech } u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{|u|\sqrt{1 + u^2}}$, $u \neq 0$.

TABELA DE INTEGRAIS

(*1*) $\int du = u + C$

(*2*) $\int \dfrac{du}{u} = \ln |u| + C$

(*3*) $\int u^{\alpha}\, du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C$ (α é constante $\neq -1$)

(*4*) $\int a^u\, du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$

(*5*) $\int e^u\, du = e^u + C$

(*6*) $\int \text{sen } u\, du = -\cos u + C$

(*7*) $\int \cos u\, du = \text{sen } u + C$

(*8*) $\int \text{tg } u\, du = \ln |\sec u| + C$

(*9*) $\int \text{cotg } u\, du = \ln |\text{sen } u| + C$

(*10*) $\int \text{cosec } u\, du = \ln |\text{cosec } u - \text{cotg } u| + C$

(*11*) $\int \sec u \, du = \ln |\sec u + \operatorname{tg} u| + C$

(*12*) $\int \sec^2 u \, du = \operatorname{tg} u + C$

(*13*) $\int \operatorname{cosec}^2 u \, du = -\operatorname{cotg} u + C$

(*14*) $\int \sec u \cdot \operatorname{tg} u \, du = \sec u + C$

(*15*) $\int \operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{cotg} u \, du = -\operatorname{cosec} u + C$

(*16*) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arc\,sen} \frac{u}{a} + C$

(*17*) $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{a} + C$

(*18*) $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,sec} \left| \frac{u}{a} \right| + C$

(*19*) $\int \operatorname{senh} u \, du = \cosh u + C$

(*20*) $\int \cosh u \, du = \operatorname{senh} u + C$

(*21*) $\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \operatorname{tgh} u + C$

(*22*) $\int \operatorname{cosech}^2 u \, du = -\operatorname{cotgh} u + C$

(*23*) $\int \operatorname{sech} u \cdot \operatorname{tgh} u \, du = -\operatorname{sech} u + C$

(*24*) $\int \operatorname{cosech} u \cdot \operatorname{cotgh} u \, du = -\operatorname{cosech} u + C$

(25) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$

(26) $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u + a}{u - a} \right| + C$

(27) $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 \pm u^2}}{u} \right| + C$

FÓRMULAS DE RECORRÊNCIA

(1) $\int \text{sen}^n\, u\, du = -\frac{1}{n} \text{sen}^{n-1}\, u \cos u + \frac{n-1}{n} \int \text{sen}^{n-2}\, u\, du$

(2) $\int \cos^n u\, du = \frac{1}{n} \cos^{n-1} u\, \text{sen}\, u + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u\, du$

(3) $\int \text{tg}^n\, u\, du = \frac{1}{n-1} \text{tg}^{n-1}\, u - \int \text{tg}^{n-2}\, u\, du$

(4) $\int \text{cotg}^n\, u\, du = -\frac{1}{n-1} \text{cotg}^{n-1}\, u - \int \text{cotg}^{n-2}\, u\, du$

(5) $\int \sec^n u\, du = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} u\, \text{tg}\, u + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u\, du$

(6) $\int \text{cosec}^n\, u\, du = -\frac{1}{n-1} \text{cosec}^{n-2}\, u\, \text{cotg}\, u + \frac{n-2}{n-1} \int \text{cosec}^{n-2}\, u\, du$

(7) $\int \frac{du}{(u^2 + a^2)^n} = \frac{u\,(u^2 + a^2)^{1-n}}{2a^2\,(n-1)} + \frac{2n-3}{2a^2\,(n-1)} \int \frac{du}{(u^2 + a^2)^{n-1}}$

MAKRON *Books*

EDITORA DA UFSC

BIBLIOGRAFIA

1. ANTON, H. – *Calculus with Analytic Geometry.* John Wiley and Sons, New York, 1980.

2. AVILA, G. S. S. – *Cálculo Diferencial e Integral.* Editora Universidade de Brasília, Brasília, 1979.

3. APOSTOL, T. M. – *Calculus.* Wiley International Edition. New York, 1967.

4. GOLDSTEIN, L. J.; LAY, D. C. e SCHNEIDER, D. I. – *Cálculo e suas Aplicações.* Hemus Livraria Editora Limitada, São Paulo, 1981.

5. HOFFMAN, L. D. – *Cálculo – Um Curso Moderno e suas Aplicações.* Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 1983.

6. KAPLAN, W. e LEWIS, D. J. – *Cálculo e Álgebra Linear.* Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., Rio de Janeiro, 1972.

7. LANG, S. – *Cálculo.* Ao Livro Tècnico S/A, Rio de Janeiro, 1970.

8. LEITHOLD, L. – *O Cálculo com Geometria Analítica.* Editora Harper & Row do Brasil Ltda., São Paulo, 1977.

9. LIMA, E. – *Análise Real,* Vol. 1. IMPA, CNPq, Rio de Janeiro, 1989.

10. PISKOUNOV, N. – *Cálculo Diferencial e Integral.* Lopes da Silva Editora, Porto, 1982.

11. ROMANO, R. – *Cálculo Diferencial e Integral.* Editora Atlas, São Paulo, 1981.

12. SIMMONS, G. F. – *Cálculo com Geometria Analítica*. Makron *Books*/McGraw-Hill, São Paulo, 1987.

13. SPIVAK, M. – *Calculus – Cálculo Infinitesimal*. Editorial Reverté S/A, Espanha, 1974.

14. SWOKOWSKI, E. W. – *Cálculo com Geometria Analítica*. Makron *Books*/ McGraw-Hill, São Paulo, 1983.

MAKRON *Books*

EDITORA DA UFSC

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

CAPÍTULO 1

SEÇÃO 1.6

1. *a*) $(-1/2, +\infty)$; *b*) $(-\infty, 68/19)$; *c*) $(-5/3, 4/3]$;
d) $(-\infty, 0) \cup (20/3, +\infty)$; *e*) $[-3, 3]$; *f*) $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$;
g) $[-1, 1/2]$; *h*) $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$; *i*) $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$;
j) $(-\infty, -4] \cup [-1, 1]$; *k*) $(-\infty, 0]$; *l*) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \cup \{0\}$;
m) $(-\infty, 3) \cup (4, +\infty)$; *n*) $(-14, -4)$; *o*) $(-\infty, 5) \cup [13/2, +\infty)$;
p) $(2, +\infty)$; *q*) $(-\infty, -2] \cup \{1\}$; *r*) $(-\infty, -5/2] \cup (-1, 2)$;
s) $(-\infty, -1/2)$; *t*) $[2/3, +\infty) \cup \{1/2\}$.

2. *a*) $\{-9/5, 3\}$; *b*) $\{-1/4, 11/12\}$; *c*) $\{2/5, 8/9\}$;
d) $\{4/3, 3\}$; *e*) $\{4/11, 4\}$; *f*) $\{-7/2, 3/4\}$;
g) $\{-11/10, 11/8\}$; *h*) $\{8\}$.

3. *a*) $(-19, -5)$; *b*) $[2/3, 2]$; *c*) $(-\infty, -2/3] \cup [7/3, +\infty)$;

d) $(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$; *e*) $(-10, -2/3)$; *f*) $(-\infty, 2/3] \cup [10, +\infty)$;

g) $(-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$; *h*) $[9/7, 19]$; *i*) $(-\infty, -5/2] \cup [3/2, +\infty)$;

j) $(-6, -3) \cup (-1, 2)$; *k*) $(2, 14/3) - \{3\}$; *l*) $(-\infty, 11/7] \cup [3, +\infty) - \{1/2\}$;

m) ϕ; *n*) ϕ; *o*) $[-3/2, 0]$;

p) $(-\infty, -2) \cup (2/3, +\infty)$; *q*) $[-2, 4] - \{-1, 3\}$; *r*) $(0, +\infty)$;

s) $(-\infty, -7/2] \cup [-1/6, +\infty)$.

CAPÍTULO 2

SEÇÃO 2.10

1. *a*) 4; *b*) 0; *c*) $\dfrac{1 - 4t^2}{t - t^2}$; *d*) $\dfrac{x^2 - 4x}{x - 3}$; *e*) $\dfrac{15}{2}$; *f*) $\dfrac{t^4 - 4}{t^2 - 1}$.

2. *a*) $\dfrac{-263}{98}$; *b*) $\dfrac{1}{9}$; *c*) $\dfrac{9x - 7}{3x - 9}$; *d*) $\dfrac{-22t^2 + 38t - 88}{-7t^2 + 53t - 28}$;

e) $\dfrac{20}{7(h - 7)}$; *f*) 11/7.

3. 3; −1/2; 2

5. $2a + 2 + h$

6. $\dfrac{1 - x}{2 + 7x}$; $\dfrac{2x + 7}{x - 1}$

10. *a*) $4\pi x^2$; *b*) $6x^2$; *c*) $\dfrac{4V}{x} + 2x^2$.

11. $2\sqrt{16 - x^2}$

12. *a*) 9; $\nexists$; $\nexists$; *b*) [2, 8]; *c*) $-4t^2 - 16t - 7$; $[-7/2, -1/2]$; *d*) 9; $\nexists$.

13. *a*) $\mathbb{R}$; *b*) $[-2, 2]$; *c*) $\mathbb{R} - \{4\}$; *d*) $[2, +\infty)$;

e) $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$; *f*) $[-3, 7]$; *g*) $\mathbb{R}$; *h*) $\mathbb{R} - \{a\}$;

i) $[-5, 2]$; *j*) $(-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$; *k*) $\mathbb{R} - \{0\}$; *l*) $[0, +\infty)$.

16. -6

18. $4x - 21$; $4x^2 - 28x + 49$; $4x - 14$

19. *a*) x^2 *b*) $\sqrt{x}$ *c*) $b\,x$ *d*) $\pm(x^2 - 3x + 5)$

20. 2 e -3 ; -2 e 9

22. $f_{\,0}\, g(x) = \begin{cases} 5x^3, & x \leq 0 \\ -x^3, & 0 < x \leq 2 \\ \sqrt{x^3}, & x > 2 \end{cases}$

23. $\sqrt{x}$; $-\sqrt{x}$

24. $2x - 3$; $-2x + 3$

25. $x - 1$

SEÇÃO 2.16

5. $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

6. *a*) par *b*) ímpar *c*) não é par nem ímpar *d*) par
e) par *f*) ímpar *g*) não é par nem ímpar h) par
i) ímpar *j*) ímpar

30. *a*) $[-1/3, 1]$ *b*) $1 \leq x \leq 100$ *c*) $\bigcup_{n \in Z} \left[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2} \right]$

CAPÍTULO 3

SEÇÃO 3.6

1. *a*) -1 *b*) 3 *c*) $\nexists$ *d*) -1 *e*) 3 *f*) 3

2. *a*) 0 *b*) 0 *c*) 0 *d*) $+\infty$

3. *a*) 0 *b*) 0 *c*) 0 *d*) $+\infty$ *e*) $-\infty$ *f*) 4

4. *a*) 0 *b*) 0 *c*) $+\infty$ *d*) $-\infty$ *e*) 1

5. *a*) $+\infty$ *b*) 1/2 *c*) $\nexists$ *d*) 1/2 *e*) $-\infty$

8. 0,005 **9.** 0,166 ... **10.** 0,1 **11.** 1 **12.** 0,75

15. 3 **16.** 8 **17.** 9 **18.** 8 **19.** 27

20. 4096 **21.** 6/5 **22.** 5/4 **23.** 2 **24.** 5

25. –1 **26.** 9/2 **27.** $\sqrt[3]{11}$ **28.** $\sqrt[3]{23^2}$ **29.** $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{3}$

30. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **31.** 2 **32.** $e^4 + 16$ **33.** $\sqrt[4]{7/3}$ **34.** $\dfrac{\text{senh } 2}{4}$

SEÇÃO 3.8

1. *a*) 2 *b*) 2 *c*) 2 *d*) 8 *e*) 8 *f*) 8

2. 4 **3.** *a*) 0 *b*) 0 *c*) 0

4. *a*) 2 *b*) 2 *c*) 2 **5.** *b*) 1, –1 e $\nexists$ **7.** $\dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{-\pi}{2}$

9. *a*) –1 *b*) 1 *c*) 0 *d*) $-\infty$ *e*) $\nexists$ *f*) 0 *g*) 0 *h*) 0

10. *a*) 5 *b*) 10 *c*) 0 *d*) 10 *e*) 0

SEÇÃO 3.10

1. *a*) 12 *b*) –1/4 *c*) 8/3 *d*) 17 *e*) –1/9 *f*) 12

2. –3/2 **3.** 0 **4.** 1 **5.** 7/2 **6.** $a + 1$

7. 1 **8.** –4/5 **9.** –2 **10.** 4 **11.** 1/8

12. 32 **13.** 8 **14.** 3/10 **15.** $b/2a$ **16.** 1/2

17. –1 **18.** 1/12 **19.** –1/2 **20.** b/a **21.** $1/3 \sqrt[3]{a^2}$

22. 4/3 **23.** 1/9 **24.** –1/3 **25.** 1

SEÇÃO 3.13

1. *a*) 2 *b*) 1/6 **2.** *a*) $+\infty$ *b*) 0

3. $+\infty$	**4.** 2	**5.** 0	**6.** 0	**7.** 1/2
8. $-\infty$	**9.** $+\infty$	**10.** $-5/7$	**11.** $+\infty$	**12.** 0
13. $+\infty$	**14.** 2/3	**15.** $+\infty$	**16.** 1	**17.** -1
18. 0	**19.** $-1/2$	**20.** $+\infty$	**21.** 10/3	**22.** $-\infty$
23. 0	**24.** -1	**25.** $-\sqrt{2}$	**26.** $+\infty$	**27.** $\sqrt[3]{3/2}$
28. $\sqrt{2}$	**29.** $-1/2$	**30.** 1/2	**31.** $+\infty$	**32.** $-\infty$
33. $+\infty$	**34.** $-\infty$	**35.** $+\infty$	**36.** $-\infty$	**37.** $-\infty$
38. $+\infty$	**39.** $+\infty$	**40.** $+\infty$		

SEÇÃO 3.15

1. 9	**2.** 4/3	**3.** 10/7	**4.** a/b	**5.** a
6. 1/8	**7.** 1/64	**8.** 0	**9.** 1/2	**10.** $-1/\pi$
11. 2/7	**12.** 5/2	**13.** -1	**14.** e	**15.** e^2
16. $1/e$	**17.** e	**18.** e	**19.** e	**20.** e^{10}
21. ln 10	**22.** 2/5 ln 2	**23.** 25 ln 5	**24.** $\frac{\ln 3}{20}$	**25.** $b-a$
26. a	**27.** 1			

SEÇÃO 3.17

1. *b*) *c*) *d*) *e*) *i*) são contínuas; *a*) *f*) *g*) *h*) *j*) não são contínuas

2. *a*) -1 *b*) $\nexists$ *c*) $\nexists$ *d*) -3 e -2 *e*) 0 *f*) $\nexists$ *g*) 1 *h*) $\nexists$

4. *a*) $-8/3$ *b*) 1 *c*) 2

5. *a*) 3, -7 *b*) $x \in (3, 6)$ *c*) $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in Z$ *d*) $\nexists$

CAPÍTULO 4

SEÇÃO 4.6

1. *a*) $2x - y - 2 = 0$; $y = -1$; $2ax - y - a^2 - 1 = 0$

b) $5x + y - 5 = 0$; $x - y + 2 = 0$

c) $8x + 4y + 3 = 0$; $(6a - 5)\,x - y - 3a^2 = 0$

d) $9x + y - 6 = 0$; $x + 9y - 6 = 0$

e) $x + (2 + a)^2\,y + 4 + a = 0$; $x + (4 - a)^2\,y - 8 + a = 0$

f) $x = 0$; $x - \sqrt{3}\,y + 3 = 0$; $x - \sqrt{a}\,y + a = 0$

2. *a*) $x + 2y - 1 = 0$; $x = 0$; $x + 2ay - 2a^3 + a = 0$

b) $x - 5y + 51 = 0$; $x + y - 6 = 0$

c) $x - 2y - 4 = 0$; $x - (5 - 6a)\,y - 18a^3 + 45a^2 - 26a = 0$

d) $3x - 27y + 80 = 0$; $27x - 3y - 80 = 0$

e) $(2 + a)^3\,x - (2 + a)\,y + 2\,(2 + a)^3 - 1 = 0$; $(4 - a)^3\,x - (4 - a)\,y - 4\,(4 - a)^3 + 1 = 0$

f) $y = 0$; $\sqrt{3}\,x + y - 5\sqrt{3} = 0$; $\sqrt{a}\,x + y - 2\sqrt{a} - a\sqrt{a} = 0$

3. $4x + 4y - 5 = 0$

4. $6x + y + 3 = 0$; $x - 6y + 56 = 0$

5. $3\sqrt{3}\,x - 3\sqrt{3}\,y - 3\sqrt{3} - 2 = 0$; $3\sqrt{3}\,x - 3\sqrt{3}\,y - 3\sqrt{3} + 2 = 0$

6. *a*) 4 *b*) 8 *c*) –1 *d*) –1 *e*) 2/15

7. *a*) $-8x$ *b*) $4x - 1$ *c*) $\dfrac{-1}{(x + 2)^2}$ *d*) $\dfrac{-4}{(x + 3)^2}$

e) $\dfrac{-1}{(2x - 1)\sqrt{2x - 1}}$ *f*) $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x + 3)^2}}$

8. *a*) $\dfrac{(x - 1)^2}{-x^2 + 2x - 2}$ *b*) $-\left(\dfrac{x - 1}{2 - x}\right)^2$ *c*) $\dfrac{2}{(x - 1)^4} - 3$ *d*) $\dfrac{-4}{(x - 1)^2}$

e) $\dfrac{4x^3 - 8x^2 + 4x - 1}{(x-1)^2}$ *f*) $\dfrac{-1 - 8x\,(x-1)^2}{(x-1)^2}$ *g*) $\dfrac{-4x}{x-1}$

11. *a*) $(3/4, +\infty)$ *b*) $(-\infty, 3/4)$

SEÇÃO 4.9

1. $f'(3^+) = 2\ ;\ f'(3^-) = -2$ **2.** $f'(1^+) = 2\ ;\ f'(1^-) = 1$

3. $f'(-2^+) = 2\ ;\ f'(-2^-) = -2$ **4.** $f'(-1^+) = 0\ ;\ f'(-1^-) = 2\ ;\ f'(1^+) = -2\ ;\ f'(1^-) = 0$

5. $f'(-2^+) = 0\ ;\ f'(-2^-) = 4\ ;\ f'(2^+) = 2\ ;\ f'(2^-) = 0$

6. *b*) é contínua *c*) 2 ; –2 ; 2 ; –2 *d*) $f'(x) = \begin{cases} 2x\ , & \text{se } |x| < 1\ , \\ -2x\ , & \text{se } |x| > 1\ , \end{cases}$ $D = \mathbb{R} - \{-1\ ,\ 1\}$

SEÇÃO 4.11

1. $2\pi\, r$ **2.** $6x + 6$ **3.** $2\,a\,w$

4. $\dfrac{3}{2x^4}$ **5.** $18x^2 + 6x + 12$ **6.** $14x + 27$

7. $-27x^8 + 30x^4 + 4x^3$ **8.** $\dfrac{-20}{(5x-3)^2}$ **9.** $2x$

10. $(s^2 - 1)\,(3s - 1)\,(15s^2 + 2) + 3\,(s^2 - 1)\,(5s^3 + 2s) + 2s\,(3s - 1)\,(5s^3 + 2s)$

11. $7\,(2a\,x + b)$ **12.** $-24u^2 + 8a\,u + 2a$ **13.** $\dfrac{-14}{(3x-1)^2}$

14. $\dfrac{2}{(t+1)^2}$ **15.** $\dfrac{3t^2 - 6t - 4}{(t-1)^2}$ **16.** $\dfrac{-t^2 + 4t - 2}{t^2 - 4t + 4}$

17. $\dfrac{-x^2 + 8x - 5}{(5 - x^2)^2}$ **18.** $\dfrac{-24}{(2x-2)^2}$ **19.** $\dfrac{6x^3 + 27x^2 + 36x + 12}{(x+2)^2}$

20. $\dfrac{t^2 - 2bt - a^2 + 2ab}{(t-b)^2}$

21. $\dfrac{-12}{x^5} - \dfrac{25}{x^6}$

22. $2x^3 - \dfrac{12}{x^7}$

24. $A = B = 1/2$

25. $4t + 1$

26. $11x + 49y + 4 = 0$

27. $x + 64y - 1026 = 0$

28. $x - y - 2\sqrt{2} + 2 = 0$; $x - y + 2 + 2\sqrt{2} = 0$

29. $(2, 2/3)$; $(1, 5/6)$

30. $a = 3$; $b = 2$

SEÇÃO 4.15

1. $100\,(3x^2 + 7x - 3)^9\,(6x + 7)$

2. $\dfrac{10}{3}\,(2x^5 + 6x^{-3})^4\,(5x^4 - 9x^{-4})$

3. $\dfrac{3}{a}\,(bx^2 + ax)^2\,(2bx + a)$

4. $60(3x^2 + 6x)^9(x + 1) + \dfrac{2}{x^3}$

5. $(7t^2 + 6t)^6\,(3t - 1)^3\,[12\,(7t^2 + 6t) + 7\,(3t - 1)\,(14t + 6)]$

6. $(5x - 2)^5\,(3x - 1)^2\,(135x - 48)$

7. $\dfrac{3\,(7t + 1)^2\,(-14t^2 - 4t + 21)}{(2t^2 + 3)^4}$

8. $8\,(2x - 5)^3 - \dfrac{1}{(x + 1)^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

9. $\dfrac{4\,(x + 1)}{\sqrt[3]{3x^2 + 6x - 2}}$

10. $-\dfrac{1}{3}\,(4t^2 - 5t + 2)^{-4/3}\,(8t - 5)$

11. $\dfrac{3x - 2}{(3x - 1)\,\sqrt{3x - 1}}$

12. $-\dfrac{21}{10}\,x^2\,(3x + 1)^{-6/5} + 7x\,(3x + 1)^{-1/5} + \dfrac{3}{2}\,(3x + 1)^{-1/2}$

13. $\dfrac{-3}{2\,(t - 1)^{3/2}\,(2t + 1)^{1/2}}$

14. $12e^{3x^2 + 6x + 7}\,(x + 1)$

15. $-\dfrac{1}{3}\,e^{3 - x}$

16. $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

17. $2^{3x^2 + 6x}\,6\,(x + 1)\,\ln 2$

18. $\dfrac{2^{\ln 2x}\,\ln 2}{x}$

19. $6\,[(7s^2 + 6s - 1)^2\,(7s + 3) - e^{-3s}]$

20. $\dfrac{-2t^2\,e^{-t^2} - e^{-t^2} - 1}{t^2}$

21. $e^{t/2}\,(1/2t^2 + 9/2t + 5)$

22. $\sqrt{\dfrac{e^t + 1}{e^t - 1}} \cdot \dfrac{e^t}{(e^t + 1)^2}$

23. $\dfrac{2}{2x + 4} \log_2 e$

24. $\dfrac{2bx^2 - a}{ax}$

25. $\dfrac{\log_3 e}{2\,(s + 1)}$

26. $\dfrac{7x}{7x^2 - 4}$

27. $\dfrac{-x - 2}{x\,(x + 1)}$

28. $\dfrac{2}{1 - x^2}$

29. $\dfrac{3\,(\ln a)\,a^{3x} - a^{3x}\,(6x - 6)\,\ln b}{b^{3x^2 - 6x}}$

30. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\sqrt{t}} \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$

31. $2t\,(2t + 1)^{t^2 - 1} \ln\,(2t + 1) + 2\,(2t + 1)^{t^2 - 2}\,(t^2 - 1)$

32. $(e^{x^2} + 4)^{\sqrt{x}} \ln\,(e^{x^2} + 4)\,\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 2x\sqrt{x}\,(e^{x^2} + 4)^{\sqrt{x} - 1}\,e^{x^2}$

33. $\dfrac{b\,(a + bs)^{\ln\,(a + bs)} \ln\,(a + bs)}{a + bs}$

34. $2 \cos\,(2x + 4)$

35. $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - u\right)$

36. $-2\,\text{sen}\,(2\theta^2 - 3\theta + 1)\,(4\theta - 3)$

37. $4 \cos \theta^2 \cos 2\theta - 4\theta\,\text{sen}\,2\theta\,\text{sen}\,\theta^2$

38. $-\text{sen}\,2\alpha$

39. $3\,\text{sen}^2\,(3x^2 + 6x) \cos\,(3x^2 + 6x)\,(6x + 6)$

40. 0

41. $6 \sec^2\,(2x + 1) + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

42. $-16\,(2s - 3)\,\text{cotg}^3\,(2s - 3)^2\,\text{cosec}^2\,(2s - 3)^2$

43. $\dfrac{6x \sec^2 x\,\text{tg}\,x - 3 \sec^2 x}{x^2}$

44. $\dfrac{-2 \cos x}{\text{sen}^3\,x}$

45. $e^{2x}\,(2 \cos 3x - 3\,\text{sen}\,3x)$

46. $\dfrac{\cos\,(x + 1) - \text{sen}\,(x + 1)}{e^x}$

47. $6\,\theta^2 \operatorname{cosec}^2 \theta^3 \cdot \operatorname{cotg} \theta^3$

48. $-\operatorname{sen}^3 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^3 \frac{x}{2} \operatorname{sen} \frac{x}{2}$

49. $\frac{-ab \operatorname{sen} bx}{2\sqrt{\cos bx}}$

50. $-2 \operatorname{tg} t$

51. $2u^2 \sec^2 u \operatorname{tg} u + 2u \operatorname{tg}^2 u$

52. $\frac{3 + 2 \operatorname{sen} 2x}{3x - \cos 2x} \log_2 e$

53. $-a^{\operatorname{cotg}\theta} \ln a \operatorname{cosec}^2 \theta$

54. $-4 \operatorname{sen} 2t\, e^{2\cos 2t}$

55. $\frac{2 \operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1 - x^2}}$

56. $\frac{-2}{\sqrt{9 - 4x^2}}$

57. $\frac{-3t}{\sqrt{1 - 9t^2}} + \operatorname{arc\,cos} 3t$

58. $\frac{1}{(s+1)^2}\left(\frac{s+1}{\sqrt{4 - s^2}} - \operatorname{arc\,sen} \frac{s}{2}\right)$

59. -1

60. $\frac{2x}{x^4 - 2x^2 + 2}$

61. $\frac{1}{2x\sqrt{x - 1}}$

62. $2 \cosh (2x - 1)$

63. $\frac{-2t^2}{|2t + 3| \sqrt{(2t + 3)^2 - 1}} + 2t \operatorname{arc\,cosec} (2t + 3)$

64. $2t \operatorname{tgh} (t^2 - 1)$

65. $\frac{x \operatorname{cotgh} x - \ln (\operatorname{senh} x)}{x^2}$

66. $16t\,(4t^2 - 3) \operatorname{sech}^2 (4t^2 - 3)^2$

67. $\frac{-(t+1) \operatorname{cosech}^2 (t+1)^2}{\sqrt{\operatorname{cotgh} (t+1)^2}}$

68. $\frac{-\operatorname{sech} (\ln x) \operatorname{tgh} (\ln x)}{x}$

69. $\frac{3}{x^2}\left(\operatorname{cosech} \frac{3x+1}{x}\right)^3 \operatorname{cotgh}\left(\frac{3x+1}{x}\right)$

70. $\frac{2 \arg \operatorname{senh} x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

71. $\arg \cosh x$

72. $\frac{4x}{4 - x^4}$

73. $\dfrac{2x^2}{1-x^4} + \text{arg cotgh}\, x^2$ **74.** $\dfrac{-(x+1)}{x\sqrt{1-4x^2}} + \text{arg sech}\, 2x$ **75.** $\dfrac{2x\ \text{arg cosh}\, x^2}{\sqrt{x^4-1}}$

76. *a*) $f'(x) = \begin{cases} -1 & , x \leq 0 \\ -e^{-x} & , x > 0 \end{cases}$ *b*) $\dfrac{4}{4x-3}$ *c*) $f'(x) = \begin{cases} 2\,e^{2x-1} & , x > 1/2 \\ -2\,e^{1-2x} & , x < 1/2 \end{cases}$

77. -1 **78.** $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{6}$ **79.** $1-x$

90. *a*) $\dfrac{\pi\,(2k+1)}{4}$, $k \in Z$ *b*) $k\pi$, $k \in Z$

SEÇÃO 4.20

1. $y^{v} = 0$ **2.** $y''' = 6a$ **3.** $y^{(10)} = 0$

4. $y'' = \dfrac{-3}{(3-x^2)\sqrt{3-x^2}}$ **5.** $y^{iv} = \dfrac{24}{(x-1)^5}$ **6.** $y''' = 8\,e^{2x+1}$

7. $y^{iv} = \dfrac{1}{e^x}$ **8.** $y'' = \dfrac{-1}{x^2}$ **9.** $y^{vii} = -a^7 \cos ax$

10. $y^{v} = \dfrac{1}{16} \text{sen} \dfrac{x}{2}$ **11.** $y''' = 2\sec^4 x + 4\sec^2 x \cdot \text{tg}^2 x$

12. $y'' = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$ **13.** *a*) sen x *b*) cos x

18. *a*) $\dfrac{-x^2}{y^2}$ *b*) $\dfrac{-3x^2-2xy}{x^2+2y}$ *c*) $-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ *d*) $\dfrac{1-y^3}{3xy^2+4y^3+1}$

e) -1 *f*) $\dfrac{y}{\sec^2 y - x}$ *g*) $\dfrac{1}{e^y-1}$

19. retas tangentes: $x - \sqrt{3}\,y + 2 = 0$ e $x + \sqrt{3}\,y + 2 = 0$

retas normais: $\sqrt{3}\,x + y - 2\sqrt{3} = 0$ e $\sqrt{3}\,x - y - 2\sqrt{3} = 0$

21. (1/8 ; – 1/16)

23. *a*) $\frac{3}{2}\,t\ ,\ t > 0$ *b*) $-\operatorname{cotg} 2t\ ,\ t \in (0, \pi/2)$

c) $-4/3 \operatorname{cotg} t\ ,\ t \in (\pi, 2\pi)$ *d*) $-\operatorname{tg} t\ ,\ t \in (-\pi/2\ ,\ 0)$ *e*) $\frac{3}{2}\,t^2\ ,\ t \in \mathbb{R}$

f) $-\operatorname{tg} t\ ,\ t \in (0, \pi/2) \cup (\pi/2\ ,\ \pi)$

24. $2y + 3x - 6\sqrt{2} = 0$

25. $2\sqrt{3}\,x - 2y + \sqrt{3} = 0\ ;\ x + \sqrt{3}\,y - 1 = 0$.

26. *a*) $3\,(\Delta x)^2$ *b*) $\dfrac{2\,\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} - \dfrac{\Delta x}{\sqrt{x}}$ *c*) $\dfrac{-3\,\Delta x}{(2x + 2\,\Delta x - 1)\,(2x - 1)} + \dfrac{3\,\Delta x}{(2x - 1)^2}$

27. *a*) –0,000998 ; –0,001 *b*) –0,118 ; –0,12 *c*) –0,078 ; –0,075

28. *a*) 7,071 *b*) 3,9895 *c*) 1,906

29. *a*) $\dfrac{6x - 4}{3x^2 - 4x}\,dx$ *b*) $\dfrac{-x}{e^x}\,dx$ *c*) $10x \cos\,(5x^2 + 6)\,dx$

32. 60000 cm^3

33. 0,0044209

34. 11,3097 cm^3

35. ± 24.000 m^2

36. 2,5%

CAPÍTULO 5

SEÇÃO 5.3

1. *a*) $16 + 2b + h$ m/s *b*) 22,1 m/s ; 22,01 m/s ; 22,001 m/s *c*) $16 + 2t$ m/s

   d) 22 m/s *e*) 2 m/s^2

2. *a*) $\dfrac{-b}{4} + c$ *b*) $\dfrac{2b}{t^3}$

3. *a*) –16 m *b*) 3 m/s ; 0 m/s ; –9 m/s ; –24 m/s *c*) 0 m/s^2 ; –6 m/s^2 ; –12 m/s^2 ; –18 m/s^2

4. – 4,9 m; –9,8 m/s e –19,6 m; –19,6 m/s

5. *a*) 54 gramas/dia *b*) 54,5 g *c*) 24,4 gramas/dia

6. –5,444 ...°C/hora **7.** –c/100 $cm^3/kgf/cm^3$

8. *a*) 6 horas *b*) 17.500 l/hora *c*) 10.000 l/hora

9. *a*) $f(t) = 4500 + 1550\,t$ *b*) 1.550,00/ano

c) 25,6% *d*) Tenderá para zero.

10. *a*) 0,8 milhares de pessoas/ano *b*) 0,068 milhares de pessoas

11. 1/12 **12.** 4,875 l/hora

13. $\frac{1}{\pi}$ m/hora ; 10π horas **14.** $\frac{d^2}{\sqrt{3}}$ m^2 ; $6\sqrt{3}$ m^3/s

15. *a*) $\frac{4\pi r^2}{3}$ *b*) $1{,}066\,\pi$ m^3/s **16.** *a*) $15\sqrt{3}$ cm^2/s *b*) 7,5 cm/s

17. 18 unidades/min **18.** 119,09 km/hora **19.** 1,45 m/s **20.** $\sqrt[3]{\frac{2\pi}{3V}}$

SEÇÃO 5.11

1. *a*) $\sqrt{6}$ *c*) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ *d*) $\frac{-2\sqrt{3}}{3}$ *e*) arc sen $2/\pi$

g) arc sec $2/\sqrt{\pi}$ *h*) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ **3.** 0 ; –2 ; 2

5. *a*) ∄ ; *b*) 3/2; *c*) 1; *d*) –1; *e*) 0; *f*) ∄ ; *g*) 0 ; –3;

h) $\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$; *i*) $k\pi,\ k \in Z$; *j*) $\frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$; *k*) 0;

l) 0 ; 3 ; –3; *m*) ∄; *n*) 3/2; *o*) 0.

6. *a*) $(-\infty\ +\infty)$ crescente *b*) $(-\infty, +\infty)$ decrescente

c) $[-1, +\infty)$ crescente ; $(-\infty, -1]$ decrescente

d) $(-\infty, -2] \cup [2/3, +\infty)$ crescente ; $[-2, 2/3]$ decrescente

e) $(-\infty, -\sqrt{7/3}] \cup [\sqrt{7/3}, +\infty)$ crescente ; $[-\sqrt{7/3}, \sqrt{7/3}]$ decrescente

f) $\left[\frac{2\pi}{3} + 2n\pi, \frac{4\pi}{3} + 2n\pi\right]$, $n \in Z$ decrescente;

$\left[\frac{-2\pi}{3} + 2n\pi, \frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right]$, $n \in Z$ crescente

g) $(-\infty, +\infty)$ crescente   *h*) $(-\infty, +\infty)$ decrescente

i) $(-\infty, +1]$ crescente ; $[1, +\infty)$ decrescente

j) $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ crescente ; $[0, 1) \cup (1, 2]$ decrescente

k) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ crescente ; $[-1, 0) \cup (0, 1]$ decrescente

l) $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$ crescente ; $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$ decrescente

7. *a*) 7 ; –5 *b*) 5 ; –4 *c*) 22 ; 13/4 *d*) 100 ; – 4/27 *e*) 1/2 ; –1/2 *f*) 2 ; 0

g) $\frac{e^2 + e^{-2}}{2}$; 1 *h*) tgh 2 ; tgh –2 *i*) 1 ; –1 *j*) 1 ; 0 *k*) 0 ; –1

9. *a*) ∄ ; 3/7 *b*) 2 ; ∄ *c*) –7 ; 1 *d*) ∄ ; 1

e) ∄ ; 0 *f*) 8 ; 0 *g*) ∄ ; ∄ *h*) ∄ ; –3/2

i) 2 ; –2 *j*) $-1+\sqrt{5}$; $-1-\sqrt{5}$ *k*) –2 ; –4/5 *l*) 64/5 ; 0

11. $a = 3$; $b = -3$

12. a é qualquer real ; $b = -3a$; $c = 0$; d é qualquer real

14. *a*) $(5/3, f(5/3))$; $(-\infty, 5/3)$ côncava para cima; $(5/3, +\infty)$ côncava para baixo

b) $(-1/3, f(-1/3))$; $(2, f(2))$; $(-\infty, 1/3) \cup (2, +\infty)$ côncava para cima;

$(-1/3, 2)$ côncava para baixo

c) ∄; $(-4, +\infty)$ côncava para cima; $(-\infty, -4)$ côncava para baixo

d) $(2/3, f(2/3))$; $(2/3, +\infty)$ côncava para cima; $(-\infty, 2/3)$ côncava para baixo

e) $(-2 \pm \sqrt{2}\,, f(-2 \pm \sqrt{2}))$; $(-\infty, -2-\sqrt{2}) \cup (-2+\sqrt{2}, +\infty)$ côncava para cima; $(-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2})$ côncava para baixo

f) $\nexists$; $(-1, +\infty)$ côncava para baixo

g) $(-6, f(-6))$; $(-6, +\infty)$ côncava para cima; $(-\infty, -6)$ côncava para baixo

h) $(\pi, f(\pi))$; $(0, \pi)$ côncava para cima; $(\pi, 2\pi)$ côncava para baixo

i) $\nexists$; $(-\infty, 1)$ côncava para baixo

j) $(2, 0)$; $(-\infty, 2)$ côncava para cima; $(2, +\infty)$ côncava para baixo

15. *a*) $y = 0$ *b*) $y = 0$; $x = -2$ *c*) $y = 0$; $x = 2$; $x = 1$

d) $y = 0$; $x = 3$; $x = -4$ *e*) $y = 0$; $x = -4$ *f*) $y = 0$; $x = 3$

g) $x = \pm 4$ *h*) $y = \pm 1$; $x = 3$; $x = -4$ *i*) $y = 1$; $x = 0$

j) $y = -1$ *k*) $x = 0$

SEÇÃO 5.13

1. *a*) 1º pedaço $\dfrac{4l}{4+\pi}$; 2º pedaço $\dfrac{l\pi}{4+\pi}$

b) Deve-se fazer somente um círculo de raio $\dfrac{l}{2\pi}$

2. $(1, 1)$ ou $(-1, -1)$ **3.** 67 dias **4.** 35 ; 35 **5.** $a/6$

6. raio da base $\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$; altura $\sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}}$

7. 8 km do encontro da canalização l com a perpendicular que passa por A.

8. quadrado de lado $\sqrt{288}$ cm

9. $(1/\sqrt{2}, 1)$; $\sqrt{2}$; equação da tangente pedida é $y + \sqrt{2}\,x - 2 = 0$

11. 1/3 da altura do cone dado **12.** $(1, 2)$ **13.** 22,01 cm × 26,91 cm

14. base 0,88 m ; altura 0,44 m

15. $\pi/4$

16. 84,56 km da cidade

17. $\sqrt{8}$ m

18. $3x + 4y - 24 = 0$

19. $a = 100$ m ; $r = \dfrac{100}{\pi}$ m

20. raio da base 7/3 m ; altura 2 m

21. 1000

22. raio $\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,R$; altura $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$

23. $a = \dfrac{40\sqrt{3}}{3}$; $b = 10\sqrt{3}$

24. $2\text{ m} \times \dfrac{\sqrt{6}\text{ m}}{2} \times \dfrac{\sqrt{6}\text{ m}}{2}$

25. 4,5 cm × 6 cm

SEÇÃO 5.15

1. 0	**2.** −1	**3.** 6/5	**4.** ∞	**5.** −11/26
6. −1/6	**7.** 0	**8.** 5/2	**9.** $+\infty$.	**10.** −1/2
11. $+\infty$	**12.** 0	**13.** 1	**14.** $+\infty$	**15.** ∞
16. 1	**17.** ∞	**18.** 0	**19.** −1	**20.** 1
21. 1	**22.** 0	**23.** 1/2	**24.** 1	**25.** 0
26. 0	**27.** 1/12	**28.** e^3	**29.** 1	**30.** $1/e$
31. 1	**32.** π	**33.** 1	**34.** ∞	**35.** 1
36. $1/e^6$	**37.** 1	**38.** 1/5	**39.** 1	**40.** e^2
41. 1	**42.** ∞	**43.** e^2		

SEÇÃO 5.17

2. *a*) $1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$; $\dfrac{\operatorname{senh} z}{5!}\, x^5$

b) $x - \pi + \dfrac{(x-\pi)^3}{3}$; $\dfrac{[16 \sec^4 z \cdot \operatorname{tg} z + 8 \sec^2 z \operatorname{tg}^3 z]\,(x-\pi)^4}{4!}$

c) $1 + \dfrac{1}{2}(x-1) - \dfrac{1}{8}(x-1)^2 + \dfrac{1}{16}(x-1)^3$; $\dfrac{-15}{16 z^3 \sqrt{z}} \cdot \dfrac{1}{24}(x-1)^4$

d) $1 - x^2 + \dfrac{x^4}{2}$; $\dfrac{e^{-z^2}}{120}(160z^3 - 120z - 32z^5)\,x^5$

3. $-0{,}6822$; $|R_4(0, 5)| < 0{,}2$

4. $\dfrac{1}{2}(x-\pi)^2 - \dfrac{1}{24}(x-\pi)^4 + \dfrac{1}{720}(x-\pi)^6$; $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) \cong -0{,}8660331$; $\left|R_6\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right| \leq 0{,}00002$

7. *a*) $\nexists$ *b*) 5/12 é ponto de mínimo *c*) 4 é ponto de mínimo *d*) $\nexists$

e) 0 é ponto de máximo; $\pm\, 2/\sqrt{3}$ são pontos de mínimo

f) -5 é ponto de máximo; 5 é ponto de mínimo

CAPÍTULO 6

SEÇÃO 6.2

11. $x - \text{arc tg}\, x + c$ **12.** $x - \dfrac{1}{x} + c$ **13.** $\sec x + c$

14. $3 \text{ arc sen}\, x + c$ **15.** $2 \text{ arc sec}\, x + c$ **16.** $\dfrac{8x^3}{3} - \dfrac{9x^2}{2} + 6x - 2\ln|x| - \dfrac{1}{x} + c$

17. $\dfrac{1}{2}e^t + \dfrac{2}{3}t^{3/2} + \ln|t| + c$ 18. $-\cos\theta + c$ **19.** $2\cosh x + c$

20. $\dfrac{t^2}{2} + \dfrac{2}{3}t^{3/2} + \dfrac{3}{4}t^{4/3} + \dfrac{4}{5}t^{5/4} + \dfrac{5}{6}t^{6/5} + c$ **21.** $\dfrac{-3}{\sqrt[3]{x}} - 5\ln|x| + c$

22. $\dfrac{2^t}{\ln 2} - \sqrt{2}\, e^t + \text{senh}\, t + c$ **23.** $\text{sen}\, x + \text{tg}\, x + c$ **24.** $\dfrac{1}{a^2}\text{ arc tg}\, x + c$

25. $x - 2 \text{ arc tg}\, x + c$ **26.** $\dfrac{t^4}{2} - \dfrac{7t^3}{3} + 2t^2 + 4t + c$ **27.** $e^t - \dfrac{8}{5}t^{5/4} - \dfrac{3}{2t^2} + c$

28. $\dfrac{1}{2}\ln|x| + c$ **29.** $\text{tg}\, x + c$ **30.** $\dfrac{x^5}{5} - \dfrac{2}{3}x^3 + x + c$

31. $\begin{cases} 2 \ln |t| + c, & \text{se } n = 1 \\ \dfrac{t^{1-n}}{(n - 1/2)(1 - n)} + c, & \text{se } n \neq 1 \end{cases}$

32. $\frac{3}{5} x^{5/3} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{10}$

33. $2x - \text{sen } 2x$

34. $-\frac{1}{x} + x - \frac{3}{2}$

35. $\frac{\pi(\sqrt{2} - 2)}{8}$

36. $\cos x + 1$

SEÇÃO 6.4

1. $\frac{1}{22}(2x^2 + 2x - 3)^{11} + c$

2. $\frac{7}{24}(x^3 - 2)^{8/7} + c$

3. $\frac{5}{8}(x^2 - 1)^{4/5} + c$

4. $\frac{-5}{9}(4 - 3x^2)^{3/2} + c$

5. $\frac{1}{6}(1 + 2x^2)^{3/2} + c$

6. $\frac{3}{8}(e^{2t} + 2)^{4/3} + c$

7. $\ln(e^t + 4) + c$

8. $-e^{1/x} - \frac{2}{x} + c$

9. $\frac{\text{tg}^2 x}{2} + c$

10. $\frac{\text{sen}^5 x}{5} + c$

11. $\frac{1}{4}\sec^4 x + c$

12. $-2 \ln |\cos x| - 5x + c$

13. $\frac{1}{2}\text{sen } 2e^x + c$

14. $\frac{1}{4}\text{sen } x^2 + c$

15. $\frac{-1}{5}\cos(5\theta - \pi) + c$

16. $\frac{1}{4}(\text{arc sen } y)^2 + c$

17. $\frac{2}{b}\ln|a + b \text{ tg } \theta| + c$

18. $\frac{1}{4}\text{arc tg }\frac{x}{4} + c$

19. $\frac{1}{2 - y} + c$

20. $\frac{3}{4}\text{sen}^{4/3}\theta + c$

21. $(\ln x)^2 + c$

22. $\frac{\text{senh } 2ax}{a} + 2x + c$

23. $\frac{1}{9}(3t^2 + 1)^{3/2} + c$

24. $\frac{2}{3}\text{arc tg }\frac{2(x + 5/2)}{3} + c$

25. $\frac{-\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{x + \sqrt{3} - 2}{\sqrt{3} + 2 - x}\right| + c$

26. $\frac{1}{4}\text{arc tg }\frac{e^x}{4} + c$

27. $2\sqrt{x + 3} - 2\ln\left|\frac{2 + \sqrt{x + 3}}{2 - \sqrt{x + 3}}\right| + c$

28. $\frac{-3}{\ln 3x} + c$

29. $\frac{-1}{4} \cos 4x + x + c$

30. $\frac{2^{x^2}}{\ln 2} + c$

31. $\frac{1}{6} e^{3x^2} + c$

32. $\frac{-1}{2 + t} + c$

33. $\ln | \ln t | + c$

34. $\frac{-4}{3} (1 - 2x^2)^{3/2} + c$

35. $\frac{1}{12} (e^{2x} + 2)^6 + c$

36. $\sqrt{4t^2 + 5} + c$

37. $- \ln | 3 - \text{sen}\, x | + c$

38. $\frac{-1}{2(1 + \sqrt{v})^4} + c$

39. $\frac{2}{7} (1+x)^3 \sqrt{1+x} - \frac{4}{5} (1+x)^2 \sqrt{1+x} + \frac{2}{3} (1+x) \sqrt{1+x} + c$

40. $\frac{-1}{5} e^{-x^5} + c$

41. $\frac{1}{2} \text{sen}\, t^2 + c$

42. $\frac{8}{27} (6x^3 + 5)^{3/2} + c$

43. $\frac{1}{3} (\text{sen}\, 2\theta)^{3/2} + c$

44. $\frac{1}{5} \text{tg}\, (5x + 3) + c$

45. $\frac{-1}{2(5 - \cos\theta)^2} + c$

46. $\ln | \text{sen}\, u | + c$

47. $- \frac{2}{5a} (1 + e^{-at})^{5/2} + c$

48. $2\, \text{sen} \sqrt{x} + c$

49. $\frac{2}{5} (t - 4)^2 \sqrt{t - 4} + \frac{8}{3} (t - 4) \sqrt{t - 4} + c$

50. $\frac{-1}{6} \cos 2x^3 + x^4 + c$

SEÇÃO 6.6

1. $\frac{-x}{5} \cos 5x + \frac{1}{25} \text{sen}\, 5x + c$

2. $(x - 1) \ln (1 - x) - x + c$

3. $\frac{e^{4t}}{4} \left(t - \frac{1}{4} \right) + c$

4. $\frac{(x + 1)}{2} \text{sen}\, 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + c$

5. $\frac{x^2}{2} \left[\ln 3x - \frac{1}{2} \right] + c$

6. $\cos^2 x\, \text{sen}\, x + \frac{2\, \text{sen}^3 x}{3} + c$

7. $\frac{2}{5} e^x \left[\text{sen}\, \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{x}{2} \right] + c$

8. $\frac{2}{3} x \sqrt{x} \ln x - \frac{4}{9} x \sqrt{x} + c$

9. $-\frac{1}{2}\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x + \frac{1}{2}\ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x| + c$

10. $\frac{x^2}{a}\operatorname{sen} ax + \frac{2x}{a^2}\cos ax - \frac{2}{a^3}\operatorname{sen} ax + c$

11. $-x\operatorname{cotg} x + \ln|\operatorname{sen} x| + c$

12. $x \operatorname{arc\,cotg} 2x + \frac{1}{4}\ln(1+4x^2) + c$

13. $\frac{b\,e^{ax}}{a^2+b^2}\left[-\cos bx + \frac{a}{b}\operatorname{sen} bx\right] + c$

14. $\frac{2}{a}\sqrt{ax+b}\,[\ln(ax+b) - 2] + c$

15. $-\frac{x^2}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{15}(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2} + c$

16. $x[\ln^3 2x - 3\ln^2 2x + 6\ln 2x - 6] + c$

17. $x \operatorname{arc\,tg} ax - \frac{1}{2a}\ln(1+a^2x^2) + c$

18. $-\frac{x^3}{4}\cos 4x + \frac{3}{16}x^2\operatorname{sen} 4x + \frac{3x}{32}\cos 4x - \frac{3}{128}\operatorname{sen} 4x + c$

19. $-x\,e^{-x} + c$

20. $\frac{x^3}{3}\left[\ln x - \frac{1}{3}\right] + c$

21. $e^x[x^2 - 2x + 2] + c$

22. $x \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{2} + \sqrt{4-x^2} + c$

23. $(x-1)\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + c$

24. $\frac{4}{25}\left[e^{3x}\operatorname{sen} 4x + \frac{3}{4}e^{3x}\cos 4x\right] + c$

25. $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left[\ln x - \frac{1}{n+1}\right] + c$

26. $x\ln(x^2+1) - 2x + 2\operatorname{arc\,tg} x + c$

27. $x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + c$

28. $\frac{x^2}{2}\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + c$

29. $e^{x^2}\left[\frac{x^4}{4} - x^2 + 1\right] + c$

30. $\frac{1}{4}\left[x^2 + x\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right] + c$

31. $e^x[x^2 + 4x + 5] + c$

32. $\frac{2}{3}x(x+1)\sqrt{x+1} - \frac{4}{15}(x+1)^2\sqrt{x+1} + c$

33. $\frac{1}{2}x\cos(\ln x) + \frac{1}{2}x \operatorname{sen}(\ln x) + c$

34. $x \operatorname{arc} \cos x - \sqrt{1-x^2} + c$

35. $\frac{1}{2}[\sec x \operatorname{tg} x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|] + c$

36. $-\frac{1}{x}e^{1/x} + e^{1/x} + c$

SEÇÃO 6.10

1. (*a*) 8 (*b*) $\frac{23}{3}$ (*c*) −1/6 (*d*) 43

3. $-\frac{5}{7}$

4. $-\frac{\pi}{4}$

5. (*a*) positivo; (*b*) nulo; (*c*) positivo; (*d*) negativo.

6. (*a*) $\sqrt{x+4}$ (*b*) $\frac{2y}{y^2+9}$ (*c*) $\theta \operatorname{sen} \theta$

7. (*a*) 9 (*b*) 4 (*c*) 2 (*d*) −1/2 (*e*) 4 (*f*) 4

11. (*a*) 15 ; 20 (*b*) 0 ; 192 (*c*) 0 ; 9 (*d*) 0 ; 720

12. $\frac{81}{10}$

13. 48

14. $\frac{31}{160}$

15. $\frac{844}{5}$

16. 2/3

17. 0

18. $\frac{2\sqrt{2}}{3}[\sqrt{5}-2]$

19. 4

20. 25

21. $\frac{17}{3}$

22. 4 ln 3

23. 2/15

24. $\frac{26}{3}$

25. $\frac{5}{36}$

26. $\frac{116}{15}$

27. $\frac{\pi}{4}$

28. $\frac{15}{64}$

29. 2

30. $2\sqrt{2} + \frac{8\sqrt{5}}{3}$

31. $\frac{31}{2} - 5\ln 2$

32. 2 ln 2 − 3/4

33. 9/2

34. $-\frac{16}{3}$

36. (*a*) 0 (*b*) 0 (*c*) $\frac{16}{15}$

SEÇÃO 6.12

1. 1/3
2. 4/3
3. 9/2
4. 48
5. $\frac{32}{3}$
6. 1/6
7. 115/6
8. 1/2
9. $e - 1$
10. 1/2
11. $8 \ln 2 - 3$
12. $e^4 - 5$
13. 8
14. 8
15. $e - \frac{1}{e}$
16. $\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \ln 2\right]$
17. $e - 3/2$
18. $\frac{1}{8}(\pi^2 + 8\pi - 8)$
19. 32/3
20. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{24} + 1$
21. $\ln 12$
22. 4/3
23. 72
24. $\frac{125}{6}$
25. $2\left[8 - \frac{3}{\ln 2}\right]$
26. 1
27. $4\,[e - 1/e]$
28. 7/3
29. $e - 3/2$
30. $\ln 2;\ 16(1 + 2\ln 2)$

CAPÍTULO 7

SEÇÃO 7.4

1. $-2\cos\sqrt{x} + c$
2. $\text{sen}\,(\text{sen}\,x) + c$
3. $-2\cos x + c$
4. $\frac{1}{2}\ln|\sec(x^2 + 1)| + c$
5. $-\ln|\text{sen}\,1/x| + c$
6. $\ln|\sec(x + 1) + \text{tg}\,(x + 1)| + c$
7. $\frac{-1}{w}\cos(wt + \theta) + c$
8. $\frac{1}{2}\ln|\text{cosec}\,x^2 - \text{cotg}\,x^2| + c$
9. $\ln|\sec(\text{sen}\,x)| + c$

10. $-\frac{1}{2}\cos(2x+1)+\frac{1}{6}\cos^3(2x+1)+c$

11. $\frac{-1}{3}\operatorname{sen}(3-3x)+\frac{2}{9}\operatorname{sen}^3(3-3x)-\frac{1}{15}\operatorname{sen}^5(3-3x)+c$

12. $-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^3(x^2-1)\cos(x^2-1)-\frac{3}{8}\operatorname{sen}(x^2-1)\cos(x^2-1)+\frac{3}{8}(x^2-1)+c$

13. $\frac{1}{4}(e^{2x}-1)+\frac{1}{8}\operatorname{sen}(2e^{2x}-2)+c$

14. $\frac{-1}{10}\cos^5 2\theta+\frac{1}{14}\cos^7 2\theta+c$

15. $-\frac{1}{8}\operatorname{sen}^4(1-2\theta)+\frac{1}{12}\operatorname{sen}^6(1-2\theta)+c$

16. $\frac{1}{20}\operatorname{sen}^{20}(t-1)+c$

17. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2(\ln\theta)+\ln|\cos(\ln\theta)|+c$

18. $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x+c$

19. $\frac{1}{4}\cos^3 x\operatorname{sen}x+\frac{3}{8}\cos x\operatorname{sen}x+\frac{3}{8}x+c$

20. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}x+x+c$

21. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+c$

22. $-15\cos x+10\cos^3 x-3\cos^5 x+c$

23. $5\operatorname{sen}^3 x-3\operatorname{sen}^5 x+c$

24. $2\cos^3 x\operatorname{sen}x-8\cos^5 x\operatorname{sen}x+3\operatorname{sen}x\cos x+3x+c$

25. $\frac{1}{18}\cos^5 3x\operatorname{sen}3x+\frac{5}{72}\cos^3 3x\operatorname{sen}3x+\frac{5}{48}\cos 3x\operatorname{sen}3x+\frac{5}{16}x+c$

26. $\operatorname{cotg}^3 x+c$

27. $\frac{-1}{16}\cos 8x+\frac{1}{4}\cos 2x+c$

28. $\frac{1}{5}\operatorname{tg}5x-x+c$

29. $\frac{1}{2}t\cos\theta-\frac{1}{4w}\operatorname{sen}(2wt+\theta)+c$

30. $\frac{-1}{3\operatorname{sen}^3 x}+\frac{1}{\operatorname{sen}x}+c$

31. $\frac{1}{8}t-\frac{1}{32}\operatorname{sen}4t+c$

32. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\sqrt{x^2-1}+\ln|\cos\sqrt{x^2-1}|+c$

33. $-\frac{1}{8}\sec(1-4x)\operatorname{tg}(1-4x)-\frac{1}{8}\ln|\sec(1-4x)+\operatorname{tg}(1-4x)|+c$

34. $\frac{1}{2}\cotg(3-2x)+\frac{1}{6}\cotg^3(3-2x)+c$

35. $-\frac{1}{6}\cotg^3(x^2-1)+c$

38. 2 u.a.

39. 8 u. a.

40. $\left[\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2\right]$ u. a.

41. $\frac{5}{16}\pi$ u.a.

42. $\frac{5}{16}\pi$ u. a.

43. $\frac{4}{3}$ u. a.

44. 1 u.a.

45. $\frac{1}{5}\frac{\sqrt{x^2-5}}{x}+c$

46. $\frac{1}{4}\text{ arc sen }\frac{4t}{3}+c$

47. $\left(\frac{1}{3}x^2+6\right)\sqrt{x^2-9}+c$

48. $\frac{1}{4}t(1-4t^2)\sqrt{1-4t^2}+\frac{3}{16}\text{ arc sen }2t+\frac{3}{8}t\sqrt{1-4t^2}+c$

49. $2\text{ arc sen }\frac{x}{2}+\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}-\frac{x(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}{4}+c$

50. $\frac{1}{5}\sqrt{(x^2+3)^5}-\sqrt{(x^2+3)^3}+c$

51. $\frac{-5\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{2\sqrt{1+x^2}}{x^2}-2\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right|+c$

52. $\frac{1}{4}x(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+\frac{3}{8}x\sqrt{x^2+1}+\frac{2}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+\frac{3}{8}\ln\left|\sqrt{x^2+1}+x\right|+c$

53. $\frac{1}{5}(t^2+16)^2\sqrt{t^2+16}-\frac{32}{3}(t^2+16)\sqrt{t^2+16}+256\sqrt{t^2+16}+c$

54. $\ln|\sqrt{e^{2x}+1}+e^x|+C$

55. $\text{arc sen}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{2}x\sqrt{2-x^2}+C$

56. $\text{arc sen}\left(\frac{e^x}{2}\right)+C$

57. $\sqrt{x^2-1}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c$

58. $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+c$

59. $\frac{-\sqrt{1+x^2}}{2x^2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right|+c$

60. $-\sqrt{4-x^2} + \text{arc sen } \dfrac{x}{2} + c$

61. $\dfrac{2}{3}\sqrt{9x^2+1} + \dfrac{5}{3}\ln\left|\sqrt{9x^2+1} + 3x\right| + c$

62. $\sqrt{x^2+2x} + 2\ln\left|x + 1 + \sqrt{x^2+2x}\right| + c$

63. $2 \text{ arc sen } \dfrac{x}{2} + \dfrac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + c$

64. $\dfrac{x\sqrt{x^2-4}}{2} - 2\ln\left|x + \sqrt{x^2-4}\right| + c$

65. $\dfrac{x\sqrt{4+x^2}}{2} + 2\ln\left|\sqrt{4+x^2} + x\right| + c$

66. $\dfrac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + x^2 + \dfrac{1}{2}\ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| + c$

67. $-\cos x + \dfrac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} - \dfrac{1}{2}\ln\left|\sqrt{1+x^2} + x\right| + c$

68. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)$

69. $\dfrac{a^2}{b}\left(\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\sqrt{3}}{8}\right)$

70. $\dfrac{1}{48}(\sqrt{2} + 2\sqrt{5})$

71. $-\dfrac{1}{16}\left(\sqrt{\dfrac{43}{3}} - \sqrt{17}\right)$

72. $\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{\sqrt{27}}{6} - \dfrac{4}{5}\right)$

SEÇÃO 7.6

1. $x^2 - 2x + 2\ln|x+1| + c$

2. $\dfrac{2}{5}\ln\left|x - \dfrac{1}{2}\right| + \dfrac{3}{5}\ln|x+2| + c$

3. $\dfrac{1}{12}\ln|x-2| + \dfrac{2}{3}\ln|x+1| - \dfrac{3}{4}\ln|x+2| + c$

4. $\dfrac{3}{2}\ln|x-1| + \dfrac{1}{2}\ln|x+1| - \dfrac{1}{2}\ln\left|x - \dfrac{1}{2}\right| + c$

5. $x + 7\ln|x-1| - \dfrac{10}{x-1} + c$

6. $3\ln\left|\dfrac{x-2}{x-3}\right| - \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{2}{x-3} + c$

7. $\ln\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)^2 + \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{5}{2(x-2)^2} + c$

8. $\dfrac{1}{16}\ln\left|\dfrac{x-4}{x}\right| + \dfrac{1}{4x} + c$

9. $\dfrac{x^2}{4} + x - \dfrac{1}{4} \ln (x^2 + 1) + \text{arc tg } x + c$

10. $\dfrac{5}{4} \left[\ln |x| - \dfrac{1}{2} \ln (x^2 + 4) \right] + c$

11. $\dfrac{3}{2} \ln \left| x^2 - x + 1 \right| + \dfrac{1}{\sqrt{3}} \text{ arc tg } \dfrac{2x - 1}{\sqrt{3}} + c$

12. $\dfrac{1}{12} \ln |x + 2| - \dfrac{1}{24} \ln \left| x^2 - 2x + 4 \right| + \dfrac{1}{4\sqrt{3}} \text{ arc tg } \dfrac{x - 1}{\sqrt{3}} + c$

13. $\dfrac{-x - 2}{2(x^2 + 2x + 3)} - \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \text{ arc tg } \dfrac{x + 1}{\sqrt{2}} + c$

14. $\ln |x| - \dfrac{1}{2} \ln \left| x^2 - x + 1 \right| + \dfrac{5\sqrt{3}}{9} \text{ arc tg } \dfrac{2x - 1}{\sqrt{3}} + \dfrac{x + 1}{3(x^2 - x + 1)} + c$

15. $4x + \dfrac{4}{9} \ln |x + 1| - 4 \ln |x + 2| + \dfrac{68}{9} \ln |x - 2| - \dfrac{16}{3(x - 2)} + c$

16. $\dfrac{1}{3} x + \dfrac{1}{10} \ln \left| x - \dfrac{1}{2} \right| - \dfrac{2}{45} \ln \left| x + \dfrac{1}{3} \right| + c$

17. $\dfrac{1}{9} \left[\ln |x| - \dfrac{1}{2} \ln (x^2 + 9) \right] + c$

18. $\dfrac{1}{3} \text{ arc tg } x - \dfrac{1}{6} \text{ arc tg } \dfrac{x}{2} + c$

19. $x + \dfrac{5}{3} \ln |x - 1| - \dfrac{1}{3} \ln \left| x^2 + x + 1 \right| + c$

20. $\dfrac{1}{2} \ln (x^2 + 2) + \dfrac{1}{x^2 + 2} + c$

21. $\ln \left| \dfrac{x - 1}{x} \right| + \dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{1}{2(x - 1)^2} + c$

22. $\dfrac{1}{4} \left(\dfrac{1}{x + 1} - \dfrac{1}{x - 1} \right) + c$

23. $\ln |x - 1| - \dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{1}{2} \ln (x^2 + 1) - \text{arc tg } x + c$

25. $\dfrac{4}{3} \ln 2$ u.a.

26. $\dfrac{1}{2} \left[\text{arc tg } \dfrac{3}{2} - \text{arc tg} \left(-\dfrac{1}{2} \right) \right]$ u.a.

27. $\left[\dfrac{2}{25}\ \ln 4 + \dfrac{3}{20}\right]$ u.a.

28. $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{9}\ \text{arc tg}\ \dfrac{2}{\sqrt{3}} + \dfrac{2}{21}\right]$ u.a.

SEÇÃO 7.9

1. $\dfrac{1}{4}\ \text{tg}^2\ \dfrac{x}{2} + \text{tg}\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\ \ln\left|\text{tg}\ \dfrac{x}{2}\right| + c$

2. $\ln\left|\text{tg}\ \dfrac{x}{2} + 1\right| + c$

3. $\ln\left|\text{tg}\ \dfrac{x}{2}\right| - \dfrac{1}{2}\ \text{tg}^2\ \dfrac{x}{2} + c$

4. $\dfrac{1}{3}\ \ln\left|\dfrac{\text{tg}\ \dfrac{x}{2} + 3}{\text{tg}\ \dfrac{x}{2} - 3}\right| + c$

5. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ \text{arc tg}\left(\dfrac{\text{tg}\ \dfrac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right) + c$

6. $\dfrac{-1}{\text{tg}\ \dfrac{x}{2}} + c$

7. $-2\ln\left|\text{tg}\ \dfrac{x}{2} - 1\right| - \dfrac{2}{\text{tg}\ \dfrac{x}{2} - 1} + \ln\left(\text{tg}^2\ \dfrac{x}{2} + 1\right) + c$

8. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\ \text{arc tg}\left(\dfrac{3\ \text{tg}\ x + 1}{2\sqrt{2}}\right) + c$

9. $-\ \text{arc tg}\left(\text{tg}\ \dfrac{2t - 1}{2}\right) + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\ \text{arc tg}\left(\sqrt{3}\ \text{tg}\ \dfrac{2t - 1}{2}\right) + c$

10. $\dfrac{2}{\sqrt{7}}\ \text{arc tg}\left[\dfrac{2\ \text{tg}\ \dfrac{t}{2} + 1}{\sqrt{7}}\right] + c$

11. $\dfrac{1}{5}\ \ln\left|\dfrac{\text{tg}\ \dfrac{e^x}{2} - \dfrac{1}{3}}{\text{tg}\ \dfrac{e^x}{2} + 3}\right| + c$

12. $-\ \text{tg}\ \dfrac{\theta}{2} + 2\ \text{arc tg}\left(\text{tg}\ \dfrac{\theta}{2}\right) + c$

13. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ \ln\left|\dfrac{\text{tg}\ \dfrac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}}{\text{tg}\ \dfrac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}}\right| + c$

14. $\frac{2}{\sqrt{14}} \text{ arc tg} \left(\frac{3 \text{ tg } \frac{\theta}{2} - 1}{\sqrt{14}} \right) + c$

15. $\frac{\pi \sqrt{3}}{9}$ u.a.

16. $\frac{2\sqrt{3}}{9} \pi$ u.a.

17. $-\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ arc tg} \sqrt{\frac{2(3-x)}{3(x-2)}} + c$

18. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+4x+9} - x - 7}{\sqrt{x^2+4x+9} - x - 1} \right| + c$

19. $\frac{2}{\sqrt{3}} \text{ arc tg} \left(\frac{\sqrt{4x^2+x-3} - 2x}{\sqrt{3}} \right) + c$

20. $-\ln \left| 1 - 2\sqrt{1+x+x^2} + 2x \right| + c$

21. $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| 1 - \frac{2\sqrt{2}\,(\sqrt{2+x-x^2} - \sqrt{2})}{x} \right| + c$

22. $\frac{-1}{\sqrt{2x+x^2} - x} - \frac{1}{\sqrt{2x+x^2} - x - 2} + c$

23. $\text{arc tg} \left(\frac{\sqrt{x^2-2x-3} - x + 1}{2} \right) + c$

24. $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x+x^2} - x + 1}{\sqrt{1+x+x^2} - x - 1} \right| - \frac{3}{2(\sqrt{1+x+x^2} - x + 1)} + c$

25. $\ln \left| \frac{x + 1 + \sqrt{x^2+3x+2}}{x + 1 - \sqrt{x^2+3x+2}} \right| + c$

26. $-\ln \left| \sqrt{x^2+2x-3} - x - 1 \right| + c$

27. $\text{arc tg } (2\sqrt{x^2+x} - 2x - 1) + c$

28. $\frac{-1}{3} \ln \left| 2 - \sqrt{9x^2+12x+5} + 3x \right| + c$

29. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{2\sqrt{x^2 - x + 5/4} - 2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 5/4} - 2x + 3} \right| + c$

30. $\frac{2}{\sqrt{3}} \text{ arc tg} \left(\frac{\sqrt{x^2+x-3} - x}{\sqrt{3}} \right) + c$

31. $\text{arc tg} \left(\frac{\sqrt{x^2-4x-4} - x}{2} \right) + c$

32. $-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+2x}-x-1}+\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+2x}-x)-2\ln\left|\sqrt{x^2+2x}-x-1\right|+c$

33. $-2 \text{ arc tg}\left(\frac{\sqrt{3-2x-x^2}-\sqrt{3}}{x}\right)+c$

CAPÍTULO 8

SEÇÃO 8.4

1. $4\sqrt{26}$ u.c.

2. $\frac{1}{27}\left[(9\cdot 2^{2/3}+4)^{3/2}-13\sqrt{13}\right]$ u.c.

3. 12 u.c.

4. 12 u.c.

5. $\frac{123}{32}$ u.c.

6. $\frac{53}{6}$ u.c.

7. senh 1 u.c.

8. $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$ u.c.

9. $\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{3}}\right|$ u.c.

10. $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$ u.c.

11. $\frac{1}{54}(37\sqrt{37}-1)$ u.c.

12. $(54\sqrt{2}-17\sqrt{17})$ u.c.

13. $\frac{80\sqrt{10}-13\sqrt{13}}{27}$ u.c.

14. $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$ u.c.

15. $\int_0^2\sqrt{1+4x^2}\,dx$

16. $\int_{\frac{1}{4}}^4\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}\,dx$

17. $\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1+2y^2}{1+y^2}}\,dy$

18. $\int_0^2\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$

19. $\int_0^1\sqrt{4x^2+8x+5}\,dx$

20. $\int_2^4\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx$

21. $\int_0^{2\pi}\sqrt{1+9\cos^2 3x}\,dx$

22. $\frac{1}{27}(85\sqrt{85}-13\sqrt{13})$ u.c.

23. 8 u.c.

24. 2π u.c.

25. $\left[\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\pi^2}+\frac{1}{2}\ln\left(\pi+\sqrt{1+\pi^2}\right)\right]$ u.c.

26. $2\sqrt{10}$ u.c.

27. $\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-1)$ u.c.

28. $\sqrt{2}\,(e^2-e)$ u.c.

29. $\frac{\pi^2}{4}$ u.c.

30. 24 u.c.

31. $2a\pi$ u.c.

32. $\frac{7}{2}\pi$ u.c.

33. $\frac{1}{2}\pi$ u.a.

34. $\frac{5\pi}{2}$ u.a.

35. $\frac{1}{6}$ u.a.

36. $\left(\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\right)$ u.a.

37. 3π u.a.

38. $\left(\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ u.a.

39. 7π u.a.

40. $\frac{144-27\pi}{32}$ u.a.

41. 6π u.a.

42. $3\pi k^2$ u.a.

SEÇÃO 8.7

1. $\frac{26\pi}{3}$ u.v.

2. $\frac{206}{15}\pi$ u.v.

3. $\frac{2}{35}\pi$ u.v.

4. $\frac{\pi}{2}$ u.v.

5. $\frac{2}{7}\pi$ u.v.

6. $\frac{\pi}{2}\left(e^4-\frac{1}{e^2}\right)$ u.v.

7. $\frac{\pi}{10}$ u.v.

8. $\frac{397}{15}\pi$ u.v.

9. $\frac{15\pi}{4}$ u.v.

10. $\frac{95}{2}\pi^2$ u.v.

11. $\frac{172}{3}\pi$ u.v.

12. $\frac{8}{5}\pi$ u.v.

13. $\frac{152}{15}\pi$ u.v.

14. $\frac{16}{3}\pi$ u.v.

15. $\frac{3}{2}\pi$ u.v.

16. $\frac{2304}{5}\pi$ u.v. ; $\frac{1024}{7}\pi$ u.v. ; 64π u.v.

17. $\frac{8}{3}\pi$ u.v.

18. $\frac{412}{15}\pi$ u.v.

19. $\frac{412}{15}\pi$ u.v.

20. $9\pi^2$ u.v.

21. $\left(\frac{4}{3}\pi-\frac{3}{32}\pi^2\right)$ u.v.

22. $\frac{\pi}{54}(577\sqrt{577}-1)$ u.a. **23.** $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-5\sqrt{5})$ u.a. **24.** 53,226 u.a.

25. $4\sqrt{5}\,\pi$ u.a. **26.** 4π u.a. **27.** 48π u.a. **28.** $\frac{8\pi}{3}(28\sqrt{7}-3\sqrt{6})$ u.a.

29. (*a*) $16\sqrt{17}\,\pi$ u.a. (*b*) $4\sqrt{17}\,\pi$ u.a.

SEÇÃO 8.11

2. (*a*) $\left(-2,\frac{5\pi}{4}\right);\left(2,\frac{-7\pi}{4}\right)$ (*b*) $\left(-\sqrt{2},-\frac{4\pi}{3}\right);\left(\sqrt{2},\frac{5\pi}{3}\right)$

(*c*) $\left(5,\frac{5\pi}{3}\right);\left(-5,\frac{-4\pi}{3}\right)$ (*d*) $\left(-4,\frac{11\pi}{6}\right);\left(4,\frac{-7\pi}{6}\right)$

3. (*a*) $\left(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ (*b*) $\left(-\frac{3}{2},\frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$ (*c*) $\left(\frac{3}{2},\frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$ (*d*) $\left(-\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

4. (*a*) $(1,-\sqrt{3})$ (*b*) $(-1{,}5307\,;\,3{,}6955)$ (*c*) $\left(\frac{-3\sqrt{2}}{2},\frac{-3\sqrt{2}}{2}\right)$

(*d*) $(0,-10)$ (*e*) $(0,10)$ (*f*) $(1,0)$

5. (*a*) $\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$ (*b*) $\left(\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right)$ (*c*) $\left(\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}\right)$ (*d*) $\left(\sqrt{2},\frac{7\pi}{4}\right)$

6. (*a*) $P_1\left(2,\frac{11\pi}{6}\right);P_2\left(2,\frac{5\pi}{4}\right)$ (*b*) $P_1\left(-2,\frac{5\pi}{6}\right);P_2\left(-2,\frac{\pi}{4}\right)$

(*c*) $P_1\left(2,\frac{-\pi}{6}\right);P_2\left(2,\frac{-3\pi}{4}\right)$ (*d*) $P_1\left(-2,\frac{-7\pi}{6}\right);P_2\left(-2,\frac{-7\pi}{4}\right)$

7. (*a*) $r=\pm 2$ (*b*) $r\cos\theta=4$ (*c*) $r\,\mathrm{sen}\,\theta=2$

(*d*) $\theta = \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$ (*e*) $r = 2\cos\theta$ (*f*) $r = 6\,\text{sen}\,\theta$

8. (*a*) $x^2 + y^2 - x = 0$ (*b*) $x^2 + y^2 - 2y = 0$ (*c*) $x + y = 1$ (*d*) $x^2 + y^2 = a^2$

33. $\sqrt{2}\,(e^{\pi/3} - 1)$ u.c. **34.** 8 u.c. **35.** $2a\pi$ u.c.

36. $\left[\frac{8}{27}(9 + \pi^2)^{3/2} - 8\right]$ u.c. **37.** $\frac{\sqrt{5}}{2}(e^{3\pi} - 1)$ u.c. **38.** 80 u.c.

39. $12\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$ **40.** $18\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{9\cos^2 3\theta + \text{sen}^2\, 3\theta}\, d\theta$

41. $64\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sqrt{16\,\text{sen}^2\, 4\theta + \cos^2 4\theta}\, d\theta$ **42.** $12\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\sqrt{\text{sen}\, 2\theta}}$

43. $2\int_0^{\pi} \sqrt{13 - 12\cos\theta}\, d\theta$ **44.** $4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{5 - 4\,\text{sen}\,\theta}\, d\theta$

45. $2\int_0^{\pi} \sqrt{13 + 12\cos\theta}\, d\theta$ **46.** $4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{5 + 4\,\text{sen}\,\theta}\, d\theta$

47. 9 u.a. **48.** $\frac{\pi}{4}$ u.a. **49.** $\frac{9\pi}{2}$ u.a. **50.** 16 u.a.

51. $\frac{9\pi}{2}$ u.a. **52.** 11π u.a. **53.** 24π u.a. **54.** 24π u.a.

55. 24π u.a. **56.** 24π u.a. **57.** $\frac{a^2(\pi - 2)}{2}$ u.a. **58.** 4π u.a.

59. $(32 - 4\pi)$ u.a. **60.** $\frac{37\pi^3}{2592}$ u.a. **61.** $\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ u.a.

62. (100 arc cos 3/5 – 48) u.a. **63.** (*a*) $\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{8}\right)$ u.a. (*b*) $\frac{14\pi - 9\sqrt{3}}{8}$ u.a.

SEÇÃO 8.16

Observação. Nos exercícios que envolvem o centro de massa, é dada a sua posição sobre um eixo coordenado cuja origem coincide com a extremidade esquerda da barra.

1. 444 kg ; 7,62 cm **2.** 54 kg ; 2,125 m **3.** 10 kg ; 3,75 m

4. $\dfrac{1}{b-a}$ **5.** $\dfrac{2}{3}$ kg ; $\dfrac{3}{2}$ m **6.** (*a*) 1,8 kg · m^2 (*b*) 7,2 kg · m^2

7. 49,07 kg ; 4 m **8.** (*a*) 443,73 kg · m^2 (*b*) 1228,8 kg · m^2

9. Para barra do ex. 1: (*a*) 12672 kg · cm^2 (*b*) 29952 kg · cm^2 (c) 5328 kg · cm^2

Para barra do ex. 3: (*a*) 20,83 kg · m^2 (*b*) 145,83 kg · m^2 (*c*) 20,83 kg · m^2

10. ln 5 u.m. : $\left(\dfrac{4}{\ln 5} - 1\right)$ u.c. **11.** 12 u.m.i. **12.** (e − 1) u.m. ; $\dfrac{1}{e-1}$ u.c.

13. (e − 2) u.m.i. **14.** 2,5 kg/m **15.** (*a*) 187,5 J (*b*) 100 J

16. 216 J **17.** 4083,33 J **18.** 1875 J **19.** 63549,36 J

20. (*a*) 44131,5 π J (*b*) 44131,5 π J **21.** 340106,66 π J **22.** 746901,12 J

23. 117684 N **24.** 14710,5 N **25.** 167372,8 u. força **26.** 2×10^4 N

27. 588420 N **28.** 7322560 N **29.** 2615200 N **30.** 197447,6 N

31. 12×10^3 N **32.** 2194,28 N **33.** 312×10^2 N